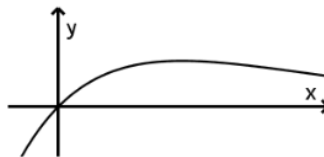


Analysis – 2020 Teil A - ohne Hilfsmittel

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^{-x}$ und $x \in \mathbb{R}$. Betrachtet werden die Dreiecke mit den Eckpunkten $O(0|0)$, $P(a|0)$ und $Q(a|f(a))$ mit $a \in \mathbb{R}^+$.



- a Begründen Sie, dass der Flächeninhalt jedes dieser Dreiecke mit dem Term $\frac{1}{2}a^2e^{-a}$ bestimmt werden kann.
- b Unter den betrachteten Dreiecken hat eines den größten Flächeninhalt. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a .

2

3

5

Aufgabe 2 (Pflichtteil)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f: x \mapsto \sin x$ und $g: x \mapsto x$. Die Graphen von f und g haben in ihrem einzigen gemeinsamen Punkt $O(0|0)$ die gleiche Steigung.

- a Ermitteln Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f , der Graph von g und die Gerade mit der Gleichung $x = \pi$ einschließen.
- b Geben Sie eine Gleichung einer Tangente an den Graphen von f an, die die beiden folgenden Eigenschaften hat:
- ♦ Die Tangente verläuft parallel zum Graphen von g .
 - ♦ Die Tangente enthält nicht den Punkt O .

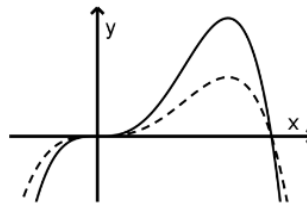
3

2

5

Aufgabe 3 (Wahlteil - schwerer)

Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_k: x \mapsto -k \cdot (x^4 - 4x^3)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$. Alle Funktionen der Schar haben die Nullstellen 0 und 4. Die Abbildung stellt zwei Graphen der Schar dar.



- a Bestimmen Sie die x -Koordinate des Hochpunkts des Graphen von f_k .
- b Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das die Graphen von f_k und f_{k+1} einschließen, für alle Werte von k den gleichen Inhalt hat.

2

3

5

Aufgabe 4 (Wahlteil - schwerer)

Für jeden Wert von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a \cdot (x-2)^3$ und $x \in \mathbb{R}$.

- a Zeigen Sie, dass die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F mit $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ eine Stammfunktion von f_2 ist.
- b Untersuchen Sie mithilfe von Skizzen, für welche Werte von a sich unter den Stammfunktionen von f_a solche befinden, die nur negative Funktionswerte haben.

1

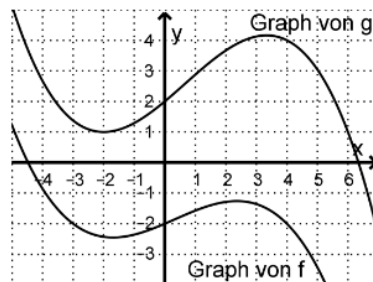
4

5

Aufgabe 5 (Wahlteil – schwerer)

Die Abbildung zeigt die Graphen der ganzrationalen Funktionen f und g . Betrachtet wird die Funktion h mit $h(x) = g(f(x))$.

Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an den Graphen von h im Punkt $(4|h(4))$.

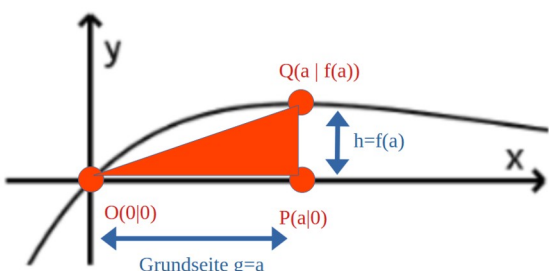


5

Lösung

Aufgabe 1

a)

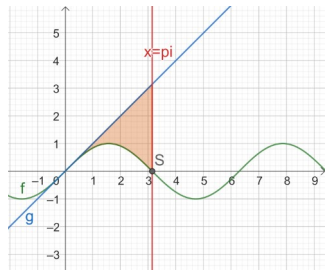
Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
	Zuerst mal „ne Skizze machen und die Punkte einzeichnen.“ - Man weiß, dass $a > 0$ ist (wegen $\mathbb{R}^+$), mehr nicht, also irgendwo rechts der y-Achse. - Q muss auf der Kurve liegen, weil sein y-Wert ein Funktionswert von f ist.
$A_{\Delta} = \frac{1}{2} g \cdot h$	Ansatz: Formel für Dreiecksfläche
$g = a$	die Grundseite g ist die Strecke von O bis P
$h = a \cdot e^{-a}$	die Höhe h ist der Funktionswert an der Stelle a, also $h = f(a)$ oder, wenn man a in die Funktionsgleichung einsetzt: $h = a \cdot e^{-a}$
$A_{\Delta} = \frac{1}{2} a \cdot a \cdot e^{-a}$	g und h in die Formel für die Fläche des Dreiecks einsetzen
$A_{\Delta} = \frac{1}{2} a^2 \cdot e^{-a}$	Zusammenfassen, damit es genau so aussieht, wie in der Aufgabe

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$A_{\Delta}(a) = \frac{1}{2} a^2 \cdot e^{-a}$	Die Fläche ist abhängig von a, also ist die Fläche eine Funktion von a. (das bedeutet: „wenn man unterschiedliche Werte für das kleine a einsetzt, ändert sich das Dreieck und damit auch dessen Flächeninhalt“) Man könnte auch $f(x) = \frac{1}{2} x^2 \cdot e^{-x}$ schreiben, aber f(x) ist ja schon vergeben...
$A'(a) = a e^{-a} - \frac{1}{2} a^2 e^{-a}$ $= e^{-a} \left(1 - \frac{1}{2} a \right)$	Die Fläche soll „maximal“ werden, wir suchen also einen Hochpunkt. Übliches Vorgehen: - Ableitungen bilden (ACHTUNG: Produkt- & Kettenregel) Produktregel gibt's hier: https://hls.bplaced.net/ibis/index.php?U=0&SID=14 - Kettenregel gibt's hier: https://hls.bplaced.net/ibis/index.php?U=0&SID=15 - Notwendige Bedingung - Hinreichende Bedingung - eventuell y-Werte
$A'(a) = 0$ $e^{-a} \left(1 - \frac{1}{2} a \right) = 0$ $a = 2$ Größter Flächeninhalt für $a = 2$.	Es gibt nur einen Wert für a, also nur ein mögliches Extremum. Die Aufgabe sagt „... hat eines den größten Flächeninhalt...“ und sagt uns damit dass es mindestens ein Maximum (einen Hochpunkt) gegeben muss ... wir KÖNNEN die hinreichende Bedingung IN DIESEM FALL also weglassen
	Es wird nicht verlangt, den Flächeninhalt zu berechnen, also sind wir fertig. MÜSSTE der Flächeninhalt berechnet werden, setzt man einfach den gefundenen Werte $a = 2$ in die Funktion der Fläche ein: $A_{\Delta}(2) = \frac{1}{2} 2^2 \cdot e^{-2}$ $= 2 e^{-2} \approx 0,271 FE$

Aufgabe 2

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$I = \int_0^{\pi} (f(x) - g(x)) \, dx$ $I = \int_0^{\pi} (g(x) - f(x)) \, dx$ $= \int_0^{\pi} (x - \sin(x)) \, dx$ $= \left[\frac{1}{2}x^2 + \cos(x) \right]_0^{\pi}$ $= \frac{1}{2}(\pi)^2 + \cos(\pi) - \left(\frac{1}{2}(0)^2 + \cos(0) \right)$ $= \frac{1}{2}(\pi)^2 + (-1) - (0 + 1)$ $= \frac{1}{2}\pi^2 - 2$	Skizze machen Hinweis: Geraden die mit „x=...“ anfangen sind Parallelen zur y-Ache. 
	Die Fläche ZWISCHEN den Graphen ZWEIER FUNKTIONEN f und g berechnet man mit dem Integral über die DIFFERENZ DER FUNKTIONEN von Schnittpunkt zu Schnittpunkt. Dabei sollte man immer die Funktion, die „weiter oben“ liegt minus die Funktion, die „weiter unten“ liegt rechnen, hier also $g(x) - f(x)$
	Dabei sollte man immer die Funktion, die „weiter oben“ liegt minus die Funktion, die „weiter unten“ liegt rechnen, hier also $g(x) - f(x)$ Funktionsgleichungen aus der Aufgabe einsetzen.
	Stammfunktion bilden und in ECKIGE KLAMMERN schreiben. Grenzen nicht vergessen! HINWEIS: Stammfunktion von $\sin(x)$ ist „minus $\cos(x)$“ – daher das „+“
	„Obere Grenze minus untere Grenze“. Klammer um die untere Grenze, damit man keinen Vorzeichenfehler macht.
	HINWEIS: Hätte man beim Integral am Anfang nicht berücksichtigt, welche Funktion „oben“ liegt, bekommt man $I = -2 - \frac{1}{2}\pi$ und muss dann noch den Betrag bilden $A = I$, weil ein Flächeninhalt immer positiv sein muss.

b) auf der nächsten Seite

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
Bedingung 1: $f'(x) = g'(x)$	Die erste Bedingung „Tangente an f parallel zu g“ bedeutet, dass es irgendwo Stellen gibt, an denen die Steigungen der beiden Graphen gleich ist.
$f(x) = \sin(x)$ $g(x) = x$ $f'(x) = \cos(x)$ $g'(x) = 1$	Ableitungen bilden
$\cos(x) = 1$	Die Ableitungen in unseren Ansatz $f'(x) = g'(x)$ einsetzen
$x_1 = 0$; $x_2 = 2\pi$; $x_3 = 4\pi$ u.s.w.	Die Gleichung nach x auflösen. HINWEIS Die Hoch- & Tiefpunkte sowie die Nullstellen von „einfachen“ Funktionen darf (sollte!) man auswendig wissen.
Bedingung 2: Tangente geht nicht durch O	
$x = 2\pi$	Die Tangente soll nicht durch den Punkt O(0 0) gehen, also fällt der erste x-Wert weg. Da in der Aufgabe steht man soll „...eine Tangente ...“ aufstellen sollen suchen wir uns einen der anderen x-Werte aus.
$t: y = m_t x + c$	Eine Tangente ist einfach eine Gerade, also Ansatz für eine Geradengleichung
$m_t = 1$	Die Steigung der Tangente ist die Steigung von $g(x) = x$, $m = 1$. HINWEIS: Allgemein ist die Steigung der Tangente immer genau die Steigung des Graphen im Berührungspunkt: $m_t = f'(x)$. Würde man das ausführlich berechnen müssen ginge das so $m_t = f'(2\pi) = \cos(2\pi) = 1$
$y = f(2\pi) = \sin(2\pi) = 0$	Wir brauchen ohc einen Punkt, um mit der Punkt-Probe das „c“ bestimmen zu können.
$\rightarrow B(2\pi 0)$	Die Tangente soll den Graph von f an der Stelle $x = 2\pi$ berühren, also suchen wir den y-Wert von f an der Stelle $x = 2\pi$.
Punkt-Probe in t	
$t: 0 = 1(2\pi) + c$ $c = -2\pi$	
$t: y = x - 2\pi$	Tangentengleichung hinschreiben mit $m = 1$ und $c = -2\pi$

Aufgabe 3

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
	HINWEISE: - Eine Schar ist eine Funktion, die noch einen Parameter hat (hier das k), den schreibt man als Index an die Funktion, um klar zu machen, dass es eine Schar ist. - Man kann eine Funktionsgleichung auf drei Arten angeben – alle meinen das Gleiche: $f_k \rightarrow -k \cdot (x^4 - 4x^3)$ $f_k(x) = -k \cdot (x^4 - 4x^3)$ $y = -k \cdot (x^4 - 4x^3)$ $k \in \mathbb{R}^+$ bedeutet „k ist irgendeine Zahl die größer ist als 0“
$f'(x) = -k \cdot (4x^3 - 12x^2)$ $f''(x) = -k \cdot (12x^2 - 24x)$	Wir suchen einen Hochpunkt, also $f'(x)=0$ und $f''(x) < 0$ Ableitungen bilden. Hinweis: Der Parameter „ k “ ist einfach irgendeine Zahl, und so behandelt man ihn auch beim Ableiten.
Notwendige: $f'(x)=0$ $-k \cdot (4x^3 - 12x^2)=0$ Nur null, wenn $4x^3 - 12x^2=0$ $x^2(4x - 12)=0$ $x_{1,2}=0$ oder $x_3=3$	Hinreichende Bedingung liefert ALLE MÖGLICHEN Extremstellen Ausklammern und Satz vom Nullprodukt
Hinreichende $f''(0)=0 \rightarrow$ unklar $\rightarrow$ VZW von f' $f'(-1) = -k(4(-1)^3 - 12(-1)^2) = 16k$ $f'(1) = -k(4(1)^3 - 12(1)^2) = 8k$ kein VZW $\rightarrow$ kein Extremum $f''(3) = -k(12(3)^2 - 24(3)) = -36k$ für $k>0$ ist das negativ $\rightarrow$ Hochpunkt	Wenn die zweite Ableitung null ist, muss man den VZW der ersten Ableitung verwenden. Dafür sucht man sich einen x -Wert, der etwas kleiner ist als der zu untersuchende (hier $x=0$) und einen der etwas größer ist. k muss -laut Aufgabe- größer also 0 sein, also sind beide Werte positiv.
Die x -Koordinate des Hochpunktes ist $x=3$	Wir sollen nur den x -Wert angeben, den y -Wert können wir weglassen.

b) auf der nächsten Seite

b)

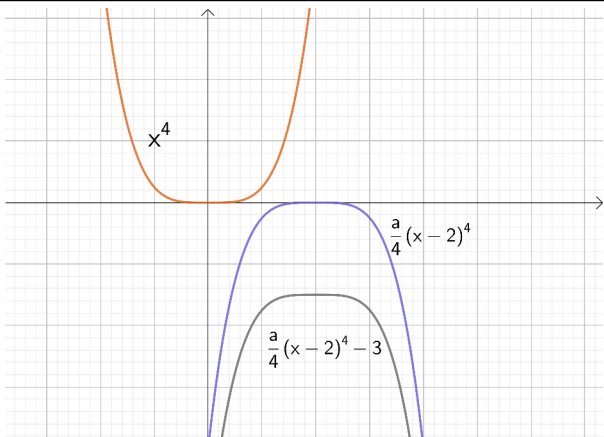
Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$I = \int_0^4 (f_k(x) - f_{k+1}(x)) \, dx$	Die Fläche ZWISCHEN den Graphen ZWEIER FUNKTIONEN f und g berechnet man mit dem Integral über die DIFFERENZ DER FUNKTIONEN von Schnittpunkt zu Schnittpunkt. Die Grenzen sind die SCHNITTSTELLEN, also -wie in der Aufgabe angegeben- 0 und 4 Hier unterscheiden sich die Funktionen nur durch ihren k-Wert, deswegen sieht das so häßlich aus. EINFACH WEITERMACHEN, DAS LÖST SICH ALLES AUF - IMMER
$I = \int_0^4 -k \cdot (x^4 - 4x^3) - (-(k+1) \cdot (x^4 - 4x^3)) \, dx$	ACHTUNG: (k+1) muss IN KLAMMERN gesetzt werden
$= \int_0^4 -k \cdot (x^4 - 4x^3) + ((k+1) \cdot (x^4 - 4x^3)) \, dx$	Das pinke „+“ kommt von „minus mal minus“
$= \int_0^4 -k \cdot (x^4 - 4x^3) + (k \cdot (x^4 - 4x^3) + 1 \cdot (x^4 - 4x^3)) \, dx$	Die Klammern (gelb und grün) wurden ausmultipliziert
$= \int_0^4 -k \cdot (x^4 - 4x^3) + k \cdot (x^4 - 4x^3) + 1 \cdot (x^4 - 4x^3) \, dx$	Jetzt noch zusammen fassen, die braunen Teile heben sich gerade auf
$= \int_0^4 1 \cdot (x^4 - 4x^3) \, dx$	Es kommt kein „k“ mehr in der Gleichung vor, der Wert von k ist also für die Fläche egal.
Integral unabhängig von k.	

Aufgabe 4

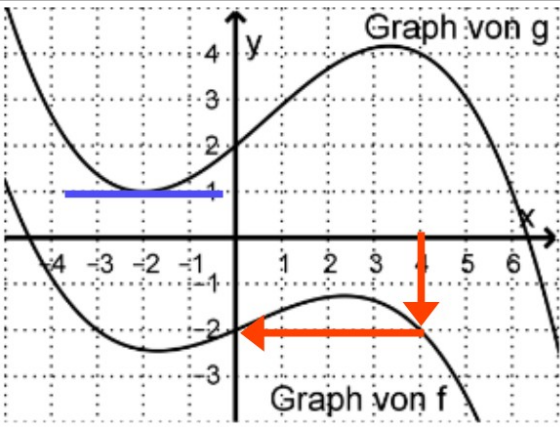
a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$F(X) = \frac{1}{2} \cdot (x-2)^4 + 3$ $F'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-2)^3 \cdot 1 + 0$ $F'(x) = 2 \cdot (x-2)^3$ Das ist genau f_2	HINWEISE: 1. Eine Schar ist eine Funktion, die noch einen Parameter hat (hier das a) 2. $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ bedeutet „a ist irgendeine Zahl aber NICHT NULL“ Wenn man die Stammfunktion ableitet muss die Funktion ,rauskommen ... also einfach ableiten. Die „0“ kommt von der Ableitung der Konstante „3“, die „4“ und die „1“ kommen von der Kettenregel „Klammer hoch Zahl“ hier ist die nochmal erklärt: https://hls.bplaced.net/ibis/index.php?U=0&SID=15 Zusammenfassen Wenn man für (jedes) a die Zahl 2 einsetzt, steht genau das da ;-)

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	
 Die Stammfunktionen lauten $F_x(x) = \frac{a}{4} \cdot (x-2)^4 + c$ $y = x^4$ ist eine nach oben geöffnete Parabel 4-ten Grades mit Tiefpunkt im Ursprung $y = \frac{a}{4} \cdot x^4$ ist eine nach unten geöffnet, wenn $a < 0$ ist. $y = \frac{a}{4} \cdot (x-2)^4$ ist nach unten geöffnet und um 2 LE nach rechts verschoben. $y = \frac{a}{4} \cdot (x-2)^4 + c$ ist nach unten offen, rechts verschoben und um c LE nach unten verschoben Es muss also $a < 0$ und $c < 0$ sein	

Aufgabe 5

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$t: y = m_t + c$ $x=4$ $m_t = h'(4)$ $h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ $h'(4) = g'(f(4)) \cdot f'(4)$ $= g'(-2) \cdot f'(4)$ $= 0 \cdot f'(4)$ $m_t = 0$ $y = h(4) = g(f(4))$ $= g(-2)$ $= 1$ $t: y = 1$	 Tangente ist eine Gerade Die Tangente soll ja an der Stelle $x=4$ berühren. Also brauchen wir die Steigung von h an der Stelle 4 Ableiten der Funktion h mit der Kettenregel Wir brauchen die Ableitung an der Stelle $x=4$, da ist ja der Berührungspunkt Aus dem Graph liest man ab, dass $f(4) = -2$ Also setzen wir statt $f(4)$ die Zahl -2. Im Graph sieht man, dass g an der Stelle $x=-2$ einen Tiefpunkt hat – also eine waagerechte Tangente – also $g'(-2)=0$ Die Steigung haben wir, die Tangente hat die Steigung „0“ ist also eine Parallele zur x-Achse. Jetzt brauchen wir noch den y-Wert des Berührungspunktes Wieder Ablesen am Graph $g(-2)=1$ Die Tangente hat $m=0$ und $c=1$, also lautet ihre Gleichung $y=0 \cdot x + 1$ oder einfacher $y=1$.