

Lineare Algebra – Vektorgeometrie (Alternative A2) – 2020 Teil A -ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 (Pflichtteil)

In einem Koordinatensystem ist ein gerader Zylinder mit dem Radius 5 und der Höhe 10 gegeben, dessen Grundfläche in der x_1x_2 -Ebene liegt. $M(8|5|10)$ ist der Mittelpunkt der Deckfläche.

- Weisen Sie nach, dass der Punkt $P(5|1|0)$ auf dem Rand der Grundfläche des Zylinders liegt.
- Unter allen Punkten auf dem Rand der Deckfläche hat der Punkt S den kleinsten Abstand von P, der Punkt T den größten. Geben Sie die Koordinaten von S an und bestimmen Sie die Koordinaten von T.

2

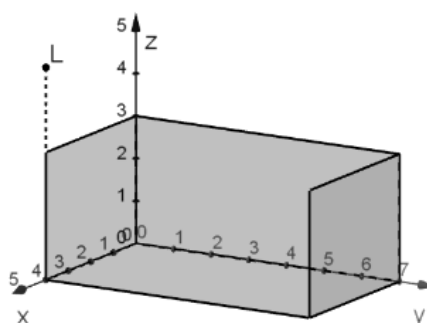
3

5

Aufgabe 2 (Pflichtteil)

HINWEIS: Die Koordinatenachsen können entweder mit x_1 - x_2 - x_3 bezeichnet werden oder, mit x - y - z .

Die Abbildung zeigt in einem Koordinatensystem modellhaft eine 7 m breite Theaterkulisserie. Die linke Seitenwand liegt im Modell in der xz -Ebene, die rechte Seitenwand ist dazu parallel. Ein auf der Bühne stehender Gegenstand wird von einer Lampe beleuchtet. Die Lampe wird im Modell durch den Punkt $L(4|0|5)$ dargestellt, die Spitze des Gegenstands durch den Punkt $S(1|6|2)$.



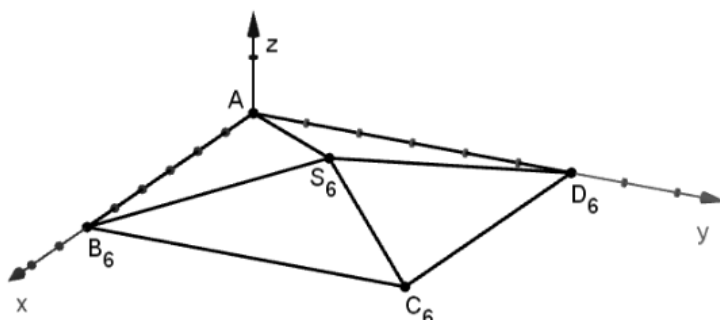
5

Untersuchen Sie rechnerisch, ob der Schatten der Spitze auf der rechten Seitenwand liegt.

Aufgabe 3 (Wahlteil - schwerer)

HINWEIS: Die Koordinatenachsen können entweder mit x_1 - x_2 - x_3 bezeichnet werden oder, mit x - y - z .

In einem Koordinatensystem werden die geraden Pyramiden $AB_tC_tD_tS_t$ mit $A(0|0|0)$, $B_t(t|0|0)$, $C_t(t|t|0)$ und $D_t(0|t|0)$ und $t \in \mathbb{R}^+$ betrachtet; die Punkte S_t haben jeweils die z -Koordinate $\frac{t}{8}$. Die Abbildung zeigt die Pyramide für $t = 6$.



Die Ebene $E: 3y + 4z = 24$ enthält den Punkt S_t für $t = 12$.

- Begründen Sie, dass E parallel zur x -Achse verläuft.
- Untersuchen Sie, für welche Werte von t die Pyramide und die Ebene E gemeinsame Punkte haben.

1

4

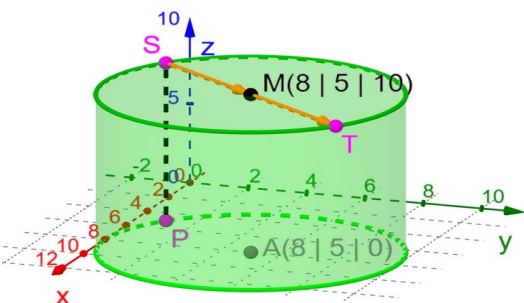
5

Lösung

Aufgabe 1

HINWEIS: Die Koordinatenachsen können entweder mit x_1 - x_2 - x_3 bezeichnet werden oder, mit x - y - z .

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
P hat $x_3=0 \rightarrow$ liegt ebenfalls in x_1-x_2-Ebene $ MP = \sqrt{(5-8)^2 + (1-5)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$	 Die Deckfläche & die Bodenfläche sind Kreise. A(8 5 0) ist Mittelpunkt der Bodenfläche. Alle Punkte auf dem Rand des Kreises müssen die gleiche x_3-Koordinate haben UND Alle Punkte des Kreises haben denselben Abstand vom Mittelpunkt M, nämlich den angegebenen Radius von 5 LE.

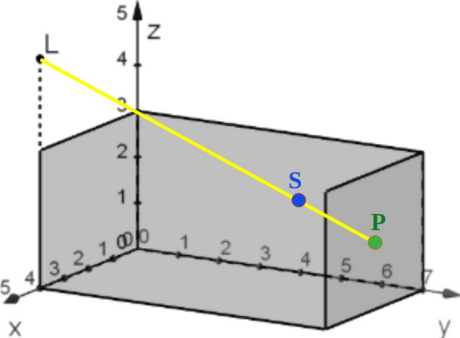
b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
S(5 1 10) $\vec{OT} = \vec{OS} + 2 \cdot \vec{SM}$ $\vec{OT} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ T(11 9 10)	Der Punkt P lautet: P(5 1 0) Der Punkt S soll den kleinsten Abstand von P haben - er muss also senkrecht „über ihm“ auf der oberen Kreisrand liegen. Es ändert sich nur die x_3-Koordinate und zwar gerade um den Betrag der Höhe des Zylinders (10). Der Punkt T soll auf dem oberen Kreisrand liegen und den größtmöglichen Abstand von P haben. Auf einem Kreis ist der größte Abstand den zwei Punkte haben können der Durchmesser des Kreises. Man könnte sagen „T muss genau gegenüber von P liegen UND auf dem oberen Rand“ liegen Der Ortsvektor von T ist $\vec{OT}$. Um zu T zu kommen muss man vom Punkt S zwei mal den Richtungsvektor $\vec{SM}$ gehen. Wenn PUNKTE gefragt sind muss man den berechneten Ortsvektor nochmal als Zeilenvektor (die Koordinaten in einer Reihe von links nach rechts ;-)) schreiben.

Aufgabe 2

HINWEIS: Die Koordinatenachsen können entweder mit x_1 - x_2 - x_3 bezeichnet werden oder, mit x - y - z .

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$g: \vec{x} = \vec{OL} + r \cdot \vec{LS} \quad ; \quad r \in \mathbb{R}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1-4 \\ 6-0 \\ 2-5 \end{pmatrix}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ 7 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ $7 = 0 + 6r$ $\frac{7}{6} = r$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{7}{6} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 7 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ Weil x_1-Koord. $0 < 0,5 < 4$ x_2-Koord. $7 = 7$ x_3-Koord. $0 < 1,5 < 3$ liegt der Schatten der Spitze auf der Wand.	SKIZZE  Licht breitet sich geradlinig aus. Man muss eine Gerade g mit Aufpunkt (=„Stützvektor“) L und dem Richtungsvektor $\vec{u} = \vec{LS}$ aufstellen. Der Richtungsvektor zeigt dabei von L in Richtung S Die rechte Wand hat die x_2-Koordinate $x_2=7$ also muss ein Punkt, der auf dieser Wand liegt auch diese x_2-Koordinate haben. (die x_2-Koordinate ist im Bild als y-Koordinate beschriftet) Mit der zweiten Zeile des Gleichungssystems können wir den Parameter „r“ berechnen. Wenn wir „r“ in die Geradengleichung g einsetzen erhalten wir den Ortsvektor von P. Schatten der Spitze trifft also nicht die Jetzt prüft man für jede der 3 Koordinaten von P, ob diese „auf der Wand liegen“: x_1-Koordinate 0,5: Die Wand reicht in x-Richtung von 0 bis 4. Der Wert 0,5 liegt dazwischen, also passt das. x_2-Koordinate 7: Die Wand hat den selben y-Wert, also passt das. x_3-Koordinate 1,5: Die Wand reicht in z-Richtung von 0 bis 3, der Punkt P liegt mit 1,5 irgendwo dazwischen, also passt das HINWEIS: Man muss das nicht so „mathematisch aufschreiben, wie links gezeigt, Man kann das in „normalen“ Worten aufschreiben.

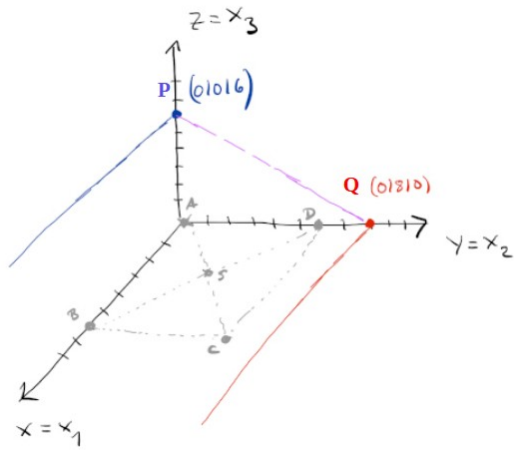
Aufgabe 3

HINWEIS: Die Koordinatenachsen können entweder mit x_1 - x_2 - x_3 bezeichnet werden oder, mit x - y - z .

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
Die Gleichung der Ebene enthält eine Bedingung für die x_1 -Koordinate. Sie ist also parallel zur x_1 -Achse.	Hier gibt es viele verschiedene Möglichkeiten der Begründung eine der folgenden genügt: - Der Normalenvektor der Ebene $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf der x_2-x_3-Ebene (hier yz-Ebene) - Die Ebenengleichung lautet $E: 0x + 3y + 4z = 24$. Der Parameter vor der x_1-Koordinate ist 0 somit ist die Ebene parallel zur x_1-Achse.

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
Spurpunkte x_1-x_2-Ebene: $x_1=0$; $x_2=0$ (hier $x=0$; $y=0$) $\rightarrow 3 \cdot 0 + 4 \cdot z = 24$ $z = 6 \rightarrow P(0 0 6)$ x_1-x_3-Ebene: $x_1=0$; $x_3=0$ (hier $x=0$; $z=0$) $\rightarrow 3 \cdot y + 4 \cdot 0 = 24$ $y = 8 \rightarrow Q(0 8 0)$	HINWEIS: Man weiß, dass E parallel zur x-Achse verläuft, weil in Aufgabenteil a) steht: „Begründen Sie, dass E Parallel zur x-Achse verläuft“. Wenn man sich nichts vorstellen kann am besten mal eine Skizze machen. Wie liegt denn die Ebene E im Koordinatensystem? Man weiß: Parallel zur x-Achse also mal die Spurgeraden berechnen Es genügt, die Spurpunkte zu berechnen, da die x_1-Koordinate „fehlt“ und E damit ja parallel zur x_1-Achse ist. (Deswegen auch die x_1-Koordinate Beim Berechnen der Spurpunkte immer null setzen). SKIZZE 
Gemeinsame Punkte sind nur möglich, wenn - die Strecke CD auf oder rechts von Q liegt $\rightarrow t \geq 8$ ODER - der Punkt S auf (oder „über“) E liegt $\rightarrow t \geq 12$ E und die Pyramide haben gemeinsame Punkte, wenn $t \geq 8$.	Je größer t wird desto weiter wandert der Punkt D nach rechts. Er hat ja die Koordinaten $D(0 t 0)$... desto „höher“ und „weiter rechts“ liegt der Punkt $S(t t 0)$ Wir wissen, dass S „höher steigt“, wenn t größer wird. Die Aufgabe sagt, dass er „das erste mal von unten gegen die Ebene E trifft“, wenn $t=12$ ist – für größere t liegt er dann sogar noch höher. Die Bedingung, die zuerst erreicht wird ist die, die wir suchen.