

# Lineare Algebra – Vektorgeometrie (Alternative A2) – 2021 Teil A -ohne Hilfsmittel

## Aufgabe 1 (Pflichtteil)

Gegeben sind der Punkt  $P(-1|7|2)$  und die Ebene  $E: x_1 + 3x_2 = 0$ .

- a Zeigen Sie, dass  $P$  nicht in  $E$  liegt.
- b Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts, der entsteht, wenn  $P$  an  $E$  gespiegelt wird.

1

4

5

## Aufgabe 2 (Pflichtteil)

HINWEIS: Die Koordinatenachsen können entweder mit  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$  bezeichnet werden oder, mit  $x$ - $y$ - $z$ .

Gegeben sind die Punkte  $A(2|-3|1)$  und  $B(2|3|1)$ .

- a Begründen Sie, dass die Gerade durch  $A$  und  $B$  parallel zur  $y$ -Achse verläuft.
- b Der Punkt  $C$  liegt auf der  $y$ -Achse. Die Gerade durch  $A$  und  $C$  steht senkrecht zur Gerade durch  $B$  und  $C$ . Bestimmen Sie die Koordinaten aller Punkte, die die beschriebenen Eigenschaften des Punkts  $C$  haben.

1

4

5

## Aufgabe 3 (Pflichtteil)

HINWEIS: manche Menschen verwendet griechische Buchstaben als Parameter (hier:  $\lambda$  gelesen wird das als „lambda“). Wenn es dich verwirrt, ersetze sie durch eigene.

Betrachtet werden die Ebene  $E: x_1 - x_2 + x_3 - 3 = 0$  und für  $a \in \mathbb{R}$  die Geraden

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} \text{ mit } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- a Bestimmen Sie denjenigen Wert von  $a$ , für den die Gerade  $g_a$  senkrecht zu  $E$  steht.
- b Untersuchen Sie, ob es einen Wert von  $a$  gibt, für den die Gerade  $g_a$  in  $E$  liegt.

2

3

5

## Aufgabe 4 (Wahlteil – schwerer)

Gegeben sind die Punkte  $A(0|0|0)$ ,  $B(3|4|1)$ ,  $C(1|7|3)$  und  $D(-2|3|2)$ .

- a Weisen Sie nach, dass das Viereck  $ABCD$  ein Parallelogramm ist.
- b Der Punkt  $T$  liegt auf der Strecke  $\overline{AC}$ . Das Dreieck  $ABT$  hat bei  $B$  einen rechten Winkel. Ermitteln Sie das Verhältnis der Länge der Strecke  $\overline{AT}$  zur Länge der Strecke  $\overline{CT}$ .

1

4

5

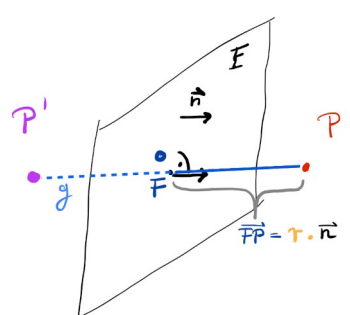
# Lösung

## Aufgabe 1

a)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                            | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $E: x_1 + 3x_2 = 0$<br>$-1 + 3 \cdot 7 = 0$<br>$20 = 0$ falsche Aussage<br>$\rightarrow P$ liegt nicht in E | Punktprobe machen (also die <b>Punktkoordinaten</b> in die entsprechenden Variablen der Ebenengleichung einsetzen)<br><br>UND<br>... interpretieren. |

b)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ $E: 1 \cdot (-1+r) + 3 \cdot (7+3r) + 0 \cdot (2+0 \cdot r) = 0$ $-1 + r + 21 + 9r = 0$ $r = -2$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $P'(-5   5   2)$ |  <p>HINWEISE:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wenn man <b>P</b> an der Ebene E spiegelt entsteht auf der anderen Seite von E sein Spiegelpunkt <b>P'</b>.</li> <li>• Diese beiden Punkte liegen auf einer Geraden <b>g</b>, die senkrecht auf E steht.</li> <li>• Der Punkt <b>F</b> (sog. „Lot-Fuss-Punkt“) liegt in der Ebene E und genau in der Mitte von <b>P</b> und <b>P'</b>.</li> <li>• <math>\vec{n}</math> ist der Normalenvektor der Ebene E (also der Vektor, der senkrecht auf E steht)</li> <li>• Die Strecke FP entspricht also einem Vielfachen („r-fachen“) des Normalenvektors n: <math>\vec{FP} = r \cdot \vec{n}</math></li> </ul> <p>Den Normalenvektor der Ebene kann man an den Parametern Koordinatenform ablesen: E: <math>1 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0</math>.</p> <p>Gerade g aufstellen, die P als Aufpunkt (Stützvektor) und n als Richtungsvektor hat: <math>g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{n}</math></p> <p>Schnittpunkt von g und E berechnen (das ist dann der „Lotfusspunkt“ F.<br/>           Dafür setzt man die Koordinaten der Geradenpunkte (also die „Zeilen“ der Geradengleichung, z.B. <math>x_1 = -1 + r</math>) in die Ebenengleichung ein ... und löst nach r auf</p> <p>Das Minuszeichen kommt daher, dass n von Ebene weg zeigt, wir aber von P zur Ebene hin wollen.<br/>           Die „2“ bedeutet, dass man zwei mal den Vektor n „gehen“ muss um von F zu P zu kommen. (HINWEIS: damit könnte man jetzt die Entfernung von P zur Ebene berechnen ...)</p> <p>Da wir aber nicht nur von P zur Ebene wollen, sondern zum Spiegelpunkt P' müssen wir die doppelte Strecke zurücklegen, also „-4n“<br/> <math>\rightarrow</math> „-4“ für „r“ in die Geradengleichung einsetzen, um damit die Koordinaten von P' zu berechnen.</p> <p>Nicht vergessen: Punkte immer als Zeilenvektor aufschreiben (von links nach rechts in einer Reihe).</p> |

## Aufgabe 2

HINWEIS: Die Koordinatenachsen können entweder mit  $x_1$ - $x_2$ - $x_3$  bezeichnet werden oder, mit  $x$ - $y$ - $z$ .

a)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                                                                                                                                                                                    | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                        |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 3-(-3) \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>Nur die <math>y</math>-Koordinate des Richtungsvektors ist von Null verschieden <math>\rightarrow</math> parallel zur <math>y</math>-Achse.</p> | <p>HINWEIS:<br/>Man kann auch mit argumentieren: „Nur die <math>y</math>-Koordinate der Punkte unterscheidet sich <math>\rightarrow</math> die Gerade muss parallel zur <math>y</math>-Achse sein.“</p> |

b)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} ; \quad c \in \mathbb{R}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <p>HINWEIS: Wenn man wenig Information oder keine Idee hat, was man tun könnte, sollte man am besten damit anfangen die Informationen mal in eine mathematische Form zu bringen. Dafür braucht man dann meistens Parameter (Buchstaben) weil man ja keine Zahlenwerte hat.<br/>Dann die mathematischen Bedingungen (hier „senkrecht“) aufschreiben und einfach mal „drauflos“-rechnen</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ $\begin{pmatrix} 0-2 \\ c-(-3) \\ 0-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ c-3 \\ 1-1 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{pmatrix} -2 \\ c+3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ c-3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$ $\begin{matrix} -2 \cdot (-2) & + & (c+3) \cdot (c-3) & + & (-1) \cdot (-1) & = & 0 \\ 4 & + & c^2 - 9 & + & 1 & = & 0 \\ & & c^2 & = & 4 \end{matrix}$ $c_1 = 2 ; \quad c_2 = -2$ | <p>Wenn C auf der <math>y</math>-Achse liegt, müssen die beiden anderen Koordinaten „0“ sein. „<math>c</math>“ kann null sein ... aber auch jede andere reelle Zahl, deswegen: <math>c \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>HINWEIS: Immer wenn man selbst Parameter verwendet sollte man sich überlegen, ob es Einschränkungen für deren Wertebereich gibt.</p> <p>HINWEIS: Zwei Vektoren <math>u</math> und <math>v</math> (hier <math>AC</math> und <math>BC</math>) sind senkrecht (orthogonal) zueinander, wenn ihr Skalarprodukt null ergibt.</p> <p>Skalarprodukt: Die Koordinaten der Vektoren zeilenweise multiplizieren und dann addieren.</p> <p>Der Punkt C kann also die Koordinaten <math>(0 2 0)</math> oder <math>(0 -2 0)</math> haben</p> |

### Aufgabe 3

HINWEIS: manche Menschen verwendet griechische Buchstaben als Parameter (hier:  $\lambda$  gelesen wird das als „lambda“). Wenn es dich verwirrt, ersetze sie durch eigene.

a)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                                                                                                                                                                                                    | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{u} = r \cdot \vec{n}$                                                                                                                                                                                                                                                                         | <p>HINWEIS:<br/>Eine Gerade ist genau dann senkrecht zu einer Ebene, wenn der NORMALENvektor <math>\vec{n}</math> DER EBENE PARALLEL zum Richtungsvektor der Gerade ist.</p> <p>Man muss also prüfen ob <math>\vec{n}</math> <u>parallel</u> zum Richtungsvektor der Gerade ist.</p> <p>ERINNERUNG: Zwei Vektoren <math>\vec{n}</math> und <math>\vec{u}</math> sind parallel (=linear abhängig) wenn es eine reelle Zahl „r“ gibt, so dass <math>\vec{u} = r \cdot \vec{n}</math></p> |
| $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                              | Den Normalenvektor der Ebene kann man an den Parametern Koordinatenform ablesen: E: $1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - 3 = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix}$                                                                                                                                                                                                                                             | Richtungsvektor der Gerade ist immer der Vektor, der mit dem Parameter (hier „lambda“) multipliziert wird ;-)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$<br><b>I : <math>2 = r \cdot 1 \rightarrow r=2</math></b><br><b>III : <math>2 = r \cdot 1 \rightarrow r=2</math></b><br><b>II : <math>1+a = 2 \cdot (-1)</math></b><br><b><math>a = -3</math></b> | <p>Einsetzen in die Bedingung für Parallelität.</p> <p>Jetzt r bestimmen:<br/>In der <b>ersten Zeile</b> muss r=2 sein<br/>In der <b>dritten Zeile</b> passt die 2 auch</p> <p>Jetzt „a“ mit der <b>zweiten Zeile</b> bestimmen: Da wir „r=2“ jetzt schon wissen setzen wir das in die zweite Zeile ein und lösen nach „a“ auf.</p> <p>Für a=-3 ist die Gerade also senkrecht zur Ebene.</p>                                                                                           |

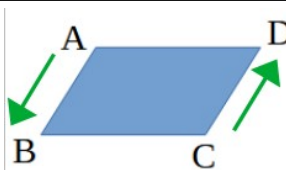
b) nächste Seite

b)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+a \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $2 \cdot 1 + (1+a) \cdot (-1) + 2 \cdot 1 = 0$ $2 - 1 - a + 2 = 0$ $a = 3$<br>E: $x_1 - x_2 + x_3 - 3 = 0$<br>$1 - (-2) + 0 - 3 = 0$<br>$3 = 3$ wahre Aussage<br><br>Es gibt einen Wert für a für den g in E liegt. | <p>Damit eine Gerade IN einer Ebene liegt müssen zwei Bedingungen erfüllt sein</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Die Gerade muss parallel zu Ebene sein<br/>UND</li> <li>2. Der Aufpunkt („Stützvektor“) der Gerade muss ein Punkt der Ebene sein.</li> <li>3.</li> </ol> <p>HINWEIS:<br/>Die Parallelität von Gerade und Ebene kann man auf unterschiedliche Arten nachweisen. Beide Methoden sind gleichwertig!</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Bei <b>Ebenen in Koordinaten-</b> oder Normalenform: Ebene und Gerade sind parallel, wenn der Richtungsvektor der Gerade (<math>\vec{u}</math>) SENKRECHT zum Normalenvektor <math>\vec{n}</math> der Ebene ist. Das prüft man mit dem Ansatz: <math>\vec{u} \cdot \vec{n} = 0</math></li> <li>• Für <b>Ebenen in Parameterform</b>: (also <math>E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}</math>) : Die Ebene und die Gerade sind parallel, wenn der Richtungsvektor der Gerade (<math>\vec{u}</math>) eine Linearkombination der Richtungsvektoren der Ebene ist. Das prüft man mit dem Ansatz: <math>\vec{u} = s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}</math></li> </ul> |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Erste Bedingung: Ist die Gerade parallel zur Ebene?                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Einsetzen der Vektoren in die Bedingung.<br>Den Normalenvektor der Ebene und den Richtungsvektor haben wir in Teil a) schon bestimmt.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Skalarprodukt: Die Koordinaten der Vektoren zeilenweise multiplizieren und dann addieren.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Für a=3 sind die Gerade und die Ebene parallel. Bedingung 1 ist also erfüllt.<br>UNBEDINGT die zweite Bedingung auch prüfen. Nur wenn beide Bedingungen erfüllt sind liegt die Gerade in E.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Zweite Bedingung: Liegt der Aufpunkt ( $1   -2   0$ ) der Gerade in der Ebene liegt prüft man mit der Punktprobe: Die Koordinaten des Punktes in die Ebenengleichung einsetzen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | Antwort auf die Frage nicht vergessen.<br>HINWEISE: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Wenn BEIDE Bedingungen erfüllt sind (und nur dann) liegt die Gerade g in der Ebene</li> <li>• Man muss a nicht angeben ... schadet natürlich auch nix ;-)</li> </ul>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |

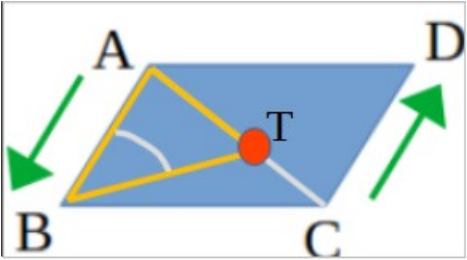
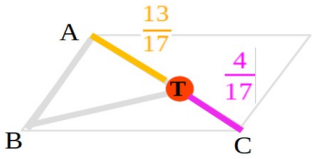
## Aufgabe 4

a)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                                                                                                                                                         | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 4-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{CD} = \begin{pmatrix} -2-1 \\ 3-7 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{AB} = -\vec{CD}$ | <div style="text-align: center;">  </div> <p>HINWEISE:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Bei Polygonen (=Vielecke) werden die Eckpunkte nach dem Alphabet und gegen der Uhrzeigersinn (=mathematisch positiv) vergeben.</li> <li>Bei einem Parallelogramm sind GEGENÜBERLIEGENDE Seiten PARALLEL UND GLEICH LANG.</li> </ul> <p>Die Richtungsvektoren zweier gegenüberliegender Seiten sind parallel und gleich lang.<br/>Das genügt als Nachweis.</p> <p>HINWEISE:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Das Minus kommt daher, dass die Vektoren „antiparallel“ sind (=in <b>entgegengesetzte Richtungen zeigen</b>) und das kommt daher, dass ich „nach dem Alphabet“ und nicht nach der Skizze vorgegangen bin ;-)</li> <li>Dreht man die Reihenfolge der Punkte in einem Vektor um weist er in die entgegengesetzte Richtung: <math>\vec{CD} = -\vec{DC}</math>.</li> <li>In der Lösung rechts kann deswegen auch schreiben <math>\vec{AB} = \vec{DC}</math></li> </ul> |

b) auf der nächsten Seite

b)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                            | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                             |  <p>HINWEIS: Wie immer, wenn's schwierig wird:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Skizze machen</li> <li>• Informationen mathematisch formulieren (notfalls mit Parametern)</li> <li>• Bedingungen aufschreiben</li> <li>• Einsetzen und losrechnen ;-)</li> </ul> |
| $\vec{AB} \cdot \vec{BT} = 0$                                                                               | Die Aufgabe sagt: „Das Dreieck ABT hat bei B einen rechten Winkel“ also ist AB senkrecht auf BT.                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{BT} = 0$                                              | Senkrecht bedeutet, das Skalarprodukt der beiden Vektoren muss null sein.                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{AC}$                                                                      | AB kennen wir schon aus Aufgabenteil a) .<br>Den Punkt B haben wir auch, es fehlt nur T ...                                                                                                                                                                                                                                                                    |
| $\vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$                                               | Über T wissen wir, dass er auf der Gerade liegen muss, die durch A und C geht:<br>$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{AC}$                                                                                                                                                                                                                                       |
| $\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$       | $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1-0 \\ 7-0 \\ 3-0 \end{pmatrix}$<br>Der Punkt A(0 0 0) ist der Ursprung, also kann man die Gerade einfacher schreiben ;-)                                                                                                                                                       |
| $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{BT} = 0$                                              | T liegt auf der Gerade; wo genau wissen wir zwar nicht, aber wir können die Koordinaten des Punktes T als allgemeinen Punkt auf der Gerade schreiben .;-)                                                                                                                                                                                                      |
| $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1-3 \\ t_2-4 \\ t_3-1 \end{pmatrix} = 0$ | Diesen „Punkt“ setzt man jetzt in die Bedingung von oben („AB senkrecht auf BT.“) ein.                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r-3 \\ 7r-4 \\ 3r-1 \end{pmatrix} = 0$     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $3(r-3) + 4(7r-4) + 1(3r-1) = 0$                                                                            | Jetzt das Skalarprodukt berechnen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $3r - 9 + 28r - 16 + 3r - 1 = 0$                                                                            | Und nach „r“ auflösen.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $34r = 26$                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $r = \frac{26}{34} = \frac{13}{17}$                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| $s = 1 - r$                                                                                                 | Wir haben die Gerade $\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{AC}$ aufgestellt, die von A durch T und durch C geht.                                                                                                                                                                                                                                                   |
| $= 1 - \frac{13}{17} = \frac{4}{17}$                                                                        | Wenn wir für $r=1$ einsetzen kommen wir von A genau zum Punkt C.                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|                                                                                                             | Wenn wir für $r = \frac{13}{17}$ einsetzen, kommen wir von A genau zum Punkt T.                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|                                                                                                             | Von T aus „fehlen“ also noch $s = \frac{4}{17}$ bis zum Punkt C. Ich habe hier „s“ verwendet, damit ich es klarer aufschreiben kann.                                                                                                                                                                                                                           |
| $r:s = \frac{13}{17} : \frac{4}{17} = 13:4$                                                                 | Bei einem „Verhältnis“ berechnet man durch eine Division.                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| Sie stehen im Verhältnis 13:4 .                                                                             | Das liest man als „13 zu 4“.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |