

Lineare Algebra – Vektorgeometrie (Alternative A2) – 2022 Teil A -ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 (Pflichtteil)

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ und

die Ebene $E: 3x_1 - x_3 = -2$.

a Begründen Sie, dass g senkrecht zu E steht.

b Die Gerade $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ hat mit E keinen gemeinsamen Punkt. Es

gibt Geraden, die in E liegen und parallel zu h verlaufen. Bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen dieser Geraden, die von h den kleinsten Abstand hat.

1

4

5

Aufgabe 2 (Pflichtteil)

Wird der Punkt $P(1|2|3)$ an der Ebene E gespiegelt, so ergibt sich der Punkt $Q(7|2|11)$.

a Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

b Auf der Gerade durch P und Q liegen die Punkte R und S symmetrisch bezüglich E ; dabei liegt R bezüglich E auf der gleichen Seite wie P . Der Abstand von R und S ist doppelt so groß wie der Abstand von P und Q . Bestimmen Sie die Koordinaten von R .

3

2

5

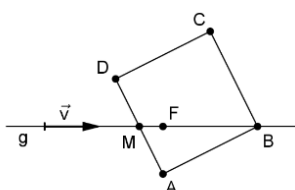
Aufgabe 3 (Pflichtteil)

Gegeben sind die Punkte $A(-5|5|-3)$ und $B(-1|1|-1)$. Geben Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke $\overline{AB}$ an und bestimmen Sie eine Gleichung derjenigen Mittelsenkrechten von $\overline{AB}$, die parallel zur x_1x_3 -Ebene verläuft.

5

Aufgabe 4 (Wahlteil – schwerer)

Die nicht maßstabsgetreue Abbildung zeigt das Quadrat $ABCD$. Die Gerade g , die durch B und den Mittelpunkt M der Seite $\overline{AD}$ verläuft, hat den Richtungsvektor $\vec{v}$. Der Punkt F ist der Fußpunkt des Lots von A auf g .



a Begründen Sie, dass $|\overline{BF}| = 2 \cdot |\overline{AF}|$ gilt.

b Geben Sie einen Term an, mit dem man die Koordinaten von B bestimmen könnte, wenn die Koordinaten von A und F sowie die Komponenten von $\vec{v}$ bekannt wären.

3

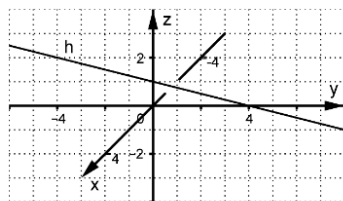
2

5

Aufgabe 5 (Wahlteil – schwerer)

HINWEIS: Die Koordinatenachsen können entweder mit x_1 - x_2 - x_3 bezeichnet werden oder, mit x - y - z .

Betrachtet wird die Schar der Ebenen $E_a: ax + y + 4z = 4$ mit $a \in \mathbb{R}$. Die Abbildung zeigt die Gerade h , die in der yz -Ebene liegt.



a Begründen Sie, dass alle Ebenen der Schar die Gerade h enthalten.

b Der Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor einer Ebene der Schar. Diese Ebene wird

mit E bezeichnet. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Würde man E in der Abbildung darstellen, so würde die Darstellung von E mit der Darstellung von h übereinstimmen.

2

3

5

Lösung

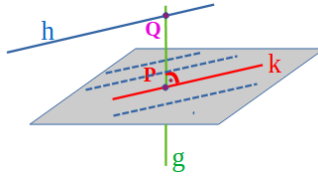
Aufgabe 1

a)

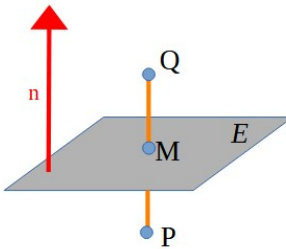
Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$\vec{u} = r \cdot \vec{n}$	HINWEIS: Eine Gerade ist genau dann <u>senkrecht zu</u> einer Ebene, wenn der NORMALENvektor $\vec{n}$ DER EBENE PARALLEL zum Richtungsvektor der Gerade ist. Man muss also prüfen ob $\vec{n}$ <u>parallel</u> zum Richtungsvektor der Gerade ist.
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	ERINNERUNG: Zwei Vektoren $\vec{n}$ und $\vec{u}$ sind parallel (=linear abhängig) wenn es eine reelle Zahl „r“ gibt, so dass $\vec{u} = r \cdot \vec{n}$
Der Richtungsvektor der Gerade ist identisch mit dem Normalenvektor der Ebene → g ist senkrecht zu E.	Den Normalenvektor der Ebene kann man an den Parametern Koordinatenform ablesen: E: $3 \cdot x_1 - 0 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 = -2$.

b) auf der nächsten Seiten

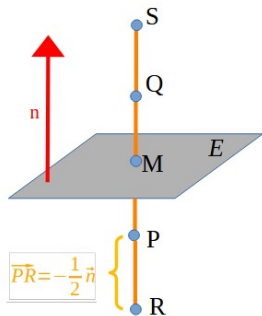
b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$k: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	Gesuchte Gerade „k“ ist parallel zu h HINWEIS: - Wenn die Gerade k parallel zu h sein sollen, dann müssen ihre Richtungsvektoren Vielfache des Richtungsvektors von h sein. - Das einfachste Vielfache ist 1 ;-) also verwenden wir für die gesuchten parallelen Geraden den <u>RV von h</u>
	Als Aufpunkt P (Stützvektor) brauchen wir einen Punkt der ... - in der Ebene liegt, weil die Gerade ja in der Ebene liegen soll UND - der „senkrecht“ unter“ einen beliebigen Punkt Q der Gerade h liegt, weil wir diejenige Gerade k suchen, die von allen, die parallel zu h sind (alle gestrichelten blauen) den <u>kleinsten Abstand</u> von h hat. 
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	Punkt P finden, indem eine Lotgerade g aufstellen und den Schnittpunkt von g mit E bestimmen. Der Normalenvektor der Ebene ist senkrecht zur Ebene ;-) , das wird der Richtungsvektor unserer Lotgerade g. Als „beliebigen Punkt von h“ nehme ich den Aufpunkt $Q(7 3 3)$ HINWEIS: - Zufälligerweise (das ist wirklich Zufall) ist die Gerade g, die wir aufgestellt haben schon in der Aufgabe angegeben (da heißt sie auch g ;-) - Der kleinste Abstand ist immer die Länge der senkrechten Verbindungslinie (=Lotgerade)
$E: \begin{matrix} 3 \cdot x_1 & - 0 \cdot x_2 & - 1 \cdot x_3 & = & - 2 \\ 3 \cdot (7+3r) & - 0 \cdot (2+0 \cdot r) & - 1 \cdot (3-r) & = & - 2 \\ & & 21 + 9r - 3 + r & = & - 2 \\ & & r & = & - 2 \end{matrix}$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$	Schnittpunkt von g und E berechnen (das ist dann der „Lotfusspunkt“ P). Dafür setzt man die Koordinaten der Geradenpunkte (also die „Zeilen“ der Geradengleichung g, z.B. $x_1 = 7 + r \cdot 3$) in die Ebenengleichung ein und löst nach r auf Dieses „$r = -2$“ in die Gerade k einsetzen, damit man den Punkt P bekommt.
$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$	Diesen Aufpunkt $P(1 3 5)$ noch in den Ansatz für die Geradengleichung von k einsetzen und die Lösung hinschreiben.

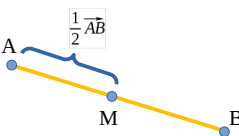
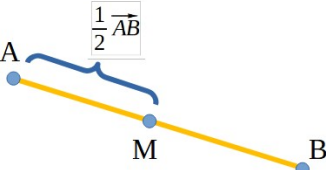
Aufgabe 2

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$E: (\vec{m} - \vec{x}) \cdot \vec{n} = 0$ $\vec{n} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 7-1 \\ 2-2 \\ 11-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2} \vec{n}$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ $E: \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - \vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 0$ $(4 - x_1) \cdot 6 + (2 - x_2) \cdot 0 + (7 - x_3) \cdot 8 = 0$ $24 - 6x_1 + 0 + 56 - 8x_3 = 0$ $-6x_1 - 8x_3 + 80 = 0$	 HINWEISE: - Bei Spiegelpunkten steht der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ senkrecht auf der Ebene E. - Der Punkt M liegt genau auf halber Strecke zwischen P und Q – er halbiert den Verbindungsvektor. Als Ansatz bietet sich die Normalenform an, weil der Normalenvektor „schon fast bekannt“ ist. Ortsvektor von M berechnen, indem man von P in Richtung Q gerade die halbe Strecke zurücklegt. ACHTUNG: Hier muss man auf die Richtung von $\vec{n}$ achten, sonst läuft man „von der Ebene weg“. Einsetzen in die Normalengleichung Und umwandeln in die Koordinatenform

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} - \frac{1}{2} \vec{n}$ $= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $R(-2 \mid 2 \mid -1)$	 Um zu R zu kommen, kann man z.B. bei P beginnen. Von P aus geht man dann $-\frac{1}{2} \vec{n}$... man entfernt sich also von der Ebene statt „auf sie zuzugehen“ wie im Teil a). Das Minus kommt daher, dass man in die entgegengesetzte Richtung will.

Aufgabe 3

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
 $\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{2} \vec{AB}$ $= \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 - (-5) \\ 1 - 5 \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ $M(-3 \mid 3 \mid -2)$	 Um den Ortsvektor von M zu bekommen, startet man z.B. bei A und „läuft“ die halbe Strecke in Richtung B. Punkt immer als „Zeilenvektor“ (also die Koordinaten von links nach rechts in einer Reihe)

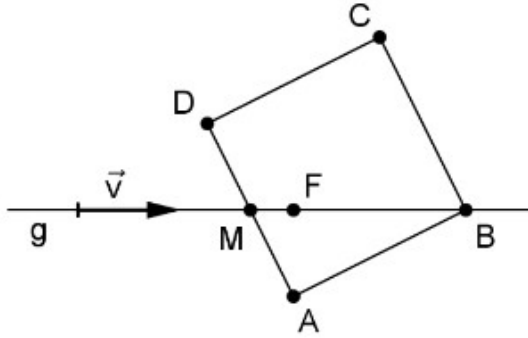
b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ $\vec{AB} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = 0$ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 - (-5) \\ 1 - 5 \\ -1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = 0$ $4a + 2c = 0$ $c = -2a$ Wähle: $a=2 \rightarrow c = -4$ $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$	Die „Mittelsenkrechte“ ist eine Gerade, die auf dem Mittelpunkt (M) senkrecht steht. Ein Richtungsvektor, der parallel zur x1-x3-Ebene verläuft muss die x2-Koordinate „0“ haben. Die Gerade muss senkrecht auf $\vec{AB}$ stehen, also muss das Skalarprodukt „0“ sein. AB hatten wir schon in Teil a) Skalarprodukt berechnen. Das ist eine Gleichung mit zwei Unbekannten ... das ist nicht eindeutig lösbar ... man kann eine der beiden Variablen frei wählen: Wählt man z.B. $a=2$ dann ergibt sich $c = -4$ Wählt man $a=0$ ergibt sich $c=0$ usw. In der Aufgabe steht „... bestimmen Sie eine Gleichung ...“ - also sucht man sich eine beliebige aus. Die Werte einsetzen und die Gleichung aufschreiben.

Aufgabe 4

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
Die Dreiecke ABM und ABF haben bei B einen gemeinsamen Winkel und außerdem jeweils einen rechten Winkel, d. h. die beiden Dreiecke sind ähnlich. Damit gilt $\frac{ BF }{ AF } = \frac{ AB }{ AM } = 2.$	Kein Kommentar!

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$\vec{OB} = \vec{OF} + \vec{BF}$ $= \vec{OF} + 2 \cdot \vec{AF} \cdot \frac{\vec{v}}{ \vec{v} }$	HINWEIS: Wenn - wie im Aufgabenteil a) – etwas „begründet“ werden soll, dann darf man davon ausgehen, dass es wahr ist und man darf es in weiteren Aufgabenteilen verwenden!  Laut Aufgabe kennen wir die Koordinaten von F. Wir brauchen also „nur noch“ den Vektor $\vec{BF}$, der von F zu B führt. Im Teil a) steht, dass die Länge des Vektors $\vec{BF}$ gerade die doppelte Länge von $\vec{AF}$ ist. Laut Aufgabe sind die Koordinaten von A und F bekannt. Damit sind auch die Länge von $\vec{AF}$ und deswegen auch die von $\vec{BF}$ bekannt. Uns fehlt jetzt nur noch die Richtung um von F zu B zu kommen. Wenn Du einen Vektor $\vec{v}$ durch seine Länge $\vec{v}$ teilst erhältst Du einen Vektor, der die Richtung von v angibt, aber nur genau 1 LE lang ist. Das schreibt man so: $\frac{\vec{v}}{ \vec{v} }$. Da wir die Koordinaten des Punktes B angeben sollen brauchen wir den Ortsvektor $\vec{OB}$ von B.

Aufgabe 5

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$A(0 4 0)$; $B(0 0 1)$	HINWEIS: Eine Ebenenschar ist eine Ebene, bei der ein Parameter (hier das „a“) noch unbekannt ist. Man schreibt meist den Parameter als kleinen Index an den Ebenen-Namen, um deutlich zu machen, dass es eine Schar ist.
Punkt A in E: $a \cdot 0 + 4 + 4 \cdot 0 = 4$ $4 = 4 \rightarrow A \text{ liegt in E}$	Wenn zwei Punkte einer Gerade in einer Ebene liegen, dann liegt die ganze Gerade in der Ebene.
Punkt B in E: $a \cdot 0 + 0 + 4 \cdot 1 = 4$ $4 = 4 \rightarrow B \text{ liegt in E}$	HINWEIS: Man darf nur dann anhand einer 3D-Projektion etwas aussagen, wenn Zusatzinformationen diese Aussage eindeutig machen. Hier darf (kann) man Punkte ablesen, weil man genau auf die yz-Ebene schaut und in der Aufgabe angegeben ist, dass die Gerade h in der yz-Ebene liegt.
Da die beiden Punkte A und B sowohl auf h als auch in E liegen, liegt h in allen Ebenen E.	Punktprobe mit A und B in E
	Frage beantworten ;-)

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
	$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor der Ebene. Richtungsvektoren verbinden beliebige Punkte der Ebene und niemals welche die außerhalb der Ebene liegen. Das bedeutet: Angenommen, man startet von einem beliebigen Punkt der Ebene (z.B. A oder B). Von diesem beliebigen Punkt aus geht man in die Richtung des RV. Dann gelangt man zu einem anderen Punkt der garantiert wieder in der Ebene liegt.
Zeichnet man die Punkte $A'(2 5 1)$ und $B'(2 1 2)$ ein, so scheinen sie auf der Gerade h zu liegen.	Hier habe ich einfach den Richtungsvektor zum Ortsvektor der beiden Punkte addiert, die wir schon kennen.
Ja, die Darstellung von E würde mit der von h übereinstimmen.	Ich würde die zwei Punkte tatsächlich einzeichnen, die roten Linien dienen nur zur Verdeutlichung ... kann man natürlich weglassen.

