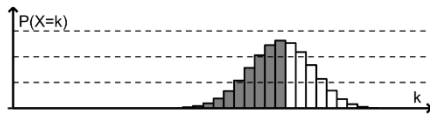


Stochastik – 2020 Teil A - ohne Hilfsmittel

Aufgabe 1 (Pflichtteil)

Gegeben sind die binomialverteilten Zufallsgrößen X und Y . X hat die Parameter $n = 40$ und $p_X = 0,65$.

- a Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit $P(X = 30)$ berechnet werden kann. 1
- b Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X . 2



Für einen Wert von k stellen die grau markierten Säulen die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ dar. Ermitteln Sie diesen Wert von k .

- c Die Zufallsgröße Y hat ebenfalls den Parameter $n = 40$. Geben Sie alle Werte von p_Y mit $0 < p_Y < 1$ an, für die die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 10)$ größer ist als die Wahrscheinlichkeit $P(Y = 30)$. 2

5

Aufgabe 2 (Pflichtteil)

Für ein Spiel werden ein Tetraeder und ein Würfel verwendet. Die Seiten des Tetraeders sind mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert, die des Würfels mit den Zahlen 1 bis 6. Ebenso wie beim Werfen des Würfels werden beim Werfen des Tetraeders alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt.

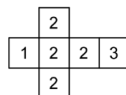
Zu Beginn des Spiels wird ein Einsatz von 5 Euro geleistet. Anschließend wird das Tetraeder einmal geworfen. Wird dabei die Zahl 3 erzielt, wird das Tetraeder ein weiteres Mal geworfen, andernfalls einmal der Würfel. Nur dann, wenn bei genau einem der beiden Würfe die Zahl 3 erzielt wird, erfolgt eine Auszahlung.

- a Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaliger Durchführung des Spiels mindestens einmal die Zahl 3 zu erzielen, $\frac{3}{8}$ beträgt. 2
- b Bei vielfacher Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich Einsätze und Auszahlungen mit der Zeit ausgleichen. Ermitteln Sie die Höhe der Auszahlung. 3

5

Aufgabe 3 (Pflichtteil)

Die Abbildung zeigt das Netz eines Würfels.



- a Der Würfel wird zweimal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der beiden geworfenen Zahlen 4 ist. 2
- b Die Zahlen „1“ und „3“ werden jeweils durch eine neue Zahl ersetzt. Das Verhältnis der beiden neuen Zahlen ist ebenfalls 1:3. Betrachtet man bei einmaligem Werfen des geänderten Würfels die geworfene Zahl, so ist der zugehörige Erwartungswert 4. Ermitteln Sie die beiden neuen Zahlen. 3

5

Aufgabe 4 (Wahlteil - schwerer)

- a Eine Urne enthält einhundert Kugeln, davon sind zwanzig weiß. Zwei Kugeln werden nacheinander zufällig gezogen; dabei wird die erste gezogene Kugel nicht zurückgelegt, bevor man die zweite zieht. Geben Sie in diesem Zusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit durch den Term $\frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99}$ angegeben wird. 1
- b Eine andere Urne enthält ebenfalls einhundert Kugeln; für die Anzahl w der enthaltenen weißen Kugeln gilt $1 < w < 99$. Auch aus dieser Urne werden zwei Kugeln nacheinander zufällig gezogen. Die erste gezogene Kugel ist weiß. Betrachtet werden zwei Fälle: 4
1. Fall: Die erste gezogene Kugel wird nicht zurückgelegt, bevor man die zweite zieht.
2. Fall: Die erste gezogene Kugel wird zurückgelegt, bevor man die zweite zieht.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auch die zweite gezogene Kugel weiß ist, beträgt im 1. Fall p , im 2. Fall ist sie 2 % von p größer. Berechnen Sie den Wert von w .

5

Aufgabe 5 (Wahlteil – schwerer)

Eine Gärtnerei, die Tulpen in den Farben Gelb, Orange und Rot züchtet, stellt Sträuße mit jeweils 15 Tulpen zusammen.

- a Einer der Sträuße soll Tulpen in zwei verschiedenen Farben enthalten. Die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen, kann mit dem Term $\binom{3}{2} \cdot 14$ berechnet werden. Beschreiben Sie für jeden der beiden Faktoren die Bedeutung im Sachzusammenhang. 2
- b In einem der Sträuße sollen zu jeder der drei Farben mindestens vier und höchstens sechs Tulpen enthalten sein. Bestimmen Sie die Anzahl der Möglichkeiten, diesen Strauß zusammenzustellen. 3

5

Lösung

Aufgabe 1

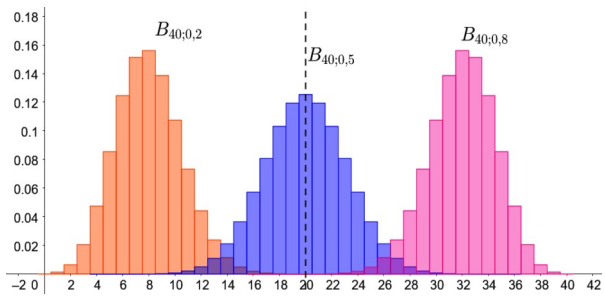
a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$P(X=30) = \binom{40}{30} (0,65)^{30} \cdot (0,35)^{10}$	
$\mu = 40 \cdot 0,65 = 26$ $k=26$	Die höchste Säule ist der Erwartungswert. Den kann man mit den Angaben berechnen.

b)

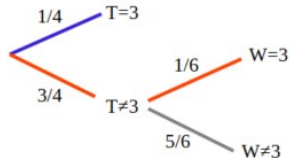
Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$\mu = 40 \cdot 0,65 = 26$ $k=26$	Die höchste Säule ist der Erwartungswert. Den kann man mit den Angaben berechnen.

c)

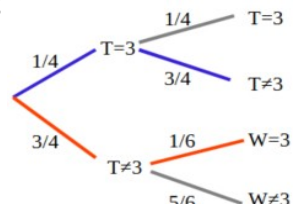
Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
	 Die Abbildung zeigt die Binomialverteilungen für $n=40$ mit unterschiedlichen Trefferwahrscheinlichkeiten. Bei $n=40$ und $p=0.5$ ist der Erwartungswert 20 und die Binomialverteilung symmetrisch zur Gerade durch den Erwartungswert (blauen Binomialverteilung). Die Werte $Y=10$ und $Y=30$ liegen beide jeweils um 10 links bzw. rechts des Erwartungswertes, haben bei $p=0,5$ also genau den selben Wert. Damit die Wahrscheinlichkeit bei kleineren Trefferzahlen (k-Werte) größer ist als bei höheren Trefferzahlen, muss die Wahrscheinlichkeit p für einen Treffer kleiner als 0,5 sein.
$p < 0,5$	Die Aufgabe verlangt nur „Geben Sie ... an“, also genügt es, den Wert einfach aufzuschreiben.

Aufgabe 2

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
	 Tetraeder-Würfel. Es gilt immer die Zahl, die unten an der Kante steht Abgerufen 11.02.2023. Quelle: CC BY-SA 3.0, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=86678
$P = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{8}$	 Foto von Jonathan Petersson: https://www.pexels.com/de-de/foto/rote-durchscheinende-matrize-auf-schwarzer-oberflaechen-979722/ „T=3“ steht für „mit dem Tetraeder eine „3“ gewürfelt.“ ; „W ≠ 3“ für: „Mit dem Würfel KEINE 3 gewürfelt“  Man kann „T=3“ ODER „T≠3 UND W=3“ würfeln. Was nach T=3 kommt ist -für diese Aufgabe- unwichtig, deswegen ist es im Baum weggelassen.

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
a: Auszahlung pro Spiel E: Erwartungswert der Auszahlung $E = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot a + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot a$ $= \frac{3}{16} \cdot a + \frac{3}{24} \cdot a$ $= \frac{5}{16} \cdot a$ $\frac{5}{16} \cdot a = 5 \rightarrow a = 16$ Die Auszahlung muss 16€ betragen.	HINWEIS: Formulierungen wie „...zu erwarten.“ oder „... durchschnittlich.“, „... auf lange Sicht...“ weisen auf den Erwartungswert hin. Gerade bei Stochastikaufgaben ist es wichtig genau zu definieren, was gemeint ist. Der Erwartungswert ist definiert als $E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots$ Laut Aufgabe gewinnt man nur „...wenn bei genau einem Wurf eine 3 erzielt wird.“ Deswegen muss der blaue Weg zu „W≠3“ führen.  „... Einsätze und Auszahlung sich ausgleichen.“ bedeutet, die zu erwartende Auszahlung muss gleich dem Einsatz pro Spiel sein. HINWEIS: Die mathematische Fachbezeichnung dafür wäre „faires Spiel“, dabei ist der Erwartungswert des Gewinns genau 0.

Aufgabe 3

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$P = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$	HINWEIS: Ein „Netz“ ist die 2D Darstellung eines Körpers in der Art, dass man sie Ausschneiden und durch Falten den Körper herstellen könnte. $P(„2“) = \frac{4}{6}$; $P(„1“) = \frac{1}{6}$; $P(„3“) = \frac{1}{6}$ Das Ereignis A: „Summe ist 4“ besteht aus diesen Ergebnissen A = { (1;3) ; (3;1) ; (2;2) } HINWEIS: Da es sich bei (1;3) ; (3;1) nur um eine andere Reihenfolge der Würfe handelt, kann man statt $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ natürlich auch $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ schreiben.

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$E = 4$ $\frac{1}{6} \cdot a + \frac{1}{6} \cdot b + \frac{4}{6} \cdot 2 = 4$ $\frac{a}{b} = \frac{1}{3} \rightarrow a = \frac{1}{3}b$ $\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}b \right) + \frac{1}{6} \cdot b + \frac{4}{6} \cdot 2 = 4$ $\frac{4}{18}b = \frac{48}{18}$ $b = 12$ $a = \frac{1}{3}b \rightarrow a = 4$ Die Zahlen sind 12 und 4.	HINWEIS: Die Formulierung „Betrachtet man bei einmaligem Werfen des geänderten Würfels die geworfene Zahl“ meint, dass man für ein Zufallsexperiment nicht mehr 2-mal hintereinander wirft, sondern nur einmal. Das Zufallsexperiment wird aber noch immer „unendlich“ oft durchgeführt Der neue Erwartungswert soll – laut Aufgabe - den Wert 4 haben. Der Erwartungswert ist definiert als $E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots$ Statt „1“ und „3“ werden die Variablen „a“ und „b“ als Werte der Zufallsvariablen x verwendet, die „2“ bleibt. In der Aufgabe steht, dass das Verhältnis der beiden neuen Zahlen 1:3 betragen soll. Ein Verhältnis von 1:3 sagt aus, dass a:b=1:3 oder, als Bruch geschrieben: $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$. HINWEIS: Ob man das Verhältnis nach a oder nach b auflöst ist unwichtig. Jetzt kann man für $a = \frac{1}{3}b$ einsetzen und hat eine Gleichung mit einer Variablen. Ausmultiplizieren, zusammenfassen und nach b auflösen Jetzt noch „a“ mit der Verhältnisgleichung $\frac{a}{b} = \frac{1}{3}$ bestimmen. Oben haben wir ja schon nach a aufgelöst ;-)

Aufgabe 4

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
Die erste und zweite Kugel ist weiß.	Man weiß, dass 20 weiße Kugeln in der Urne sind. Somit bedeutet sie „20“ in $\frac{20}{100}$, dass zuerst eine weiße gezogen wird. Die Anzahl der Weißen nimmt durch den ersten Zug um eins ab auf 19. Deswegen muss auch $\frac{19}{99}$ für eine weiße Kugel stehen.

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$p_{\text{ohne}} = \frac{w-1}{99}$ $p_{\text{mit}} = \frac{w}{100}$ $p_{\text{ohne}} \cdot 1,02 = p_{\text{mit}}$ $\frac{w-1}{99} \cdot 1,02 = \frac{w}{100}$ $\frac{w-1}{99} \cdot \frac{102}{100} = \frac{w}{100} \quad : \frac{102}{100}$ $\frac{w-1}{99} = \frac{w}{100} \cdot \frac{100}{102}$ $\frac{w-1}{99} = \frac{w}{102} \quad *99$ $w-1 = 99 \cdot \frac{w}{102} \quad *102$ $102(w-1) = 99w$ $102w - 102 = 99w$ $102w - 99w = 102$ $3w = 102$ $w = 34$	ACHTUNG: Nur die Wahrscheinlichkeit für den zweiten Zug wird angegeben. 1. Fall: OHNE Zurücklegen Die Wahrscheinlichkeit nach einer weißen Kugel wieder eine weiße Kugeln zu ziehen beträgt (wegen des Zurücklegens) $p_{\text{ohne}} = \frac{w-1}{99}$ 2. Fall: MIT Zurücklegen Die Wahrscheinlichkeit nach einer weißen Kugel wieder eine weiße Kugeln zu ziehen beträgt $p_{\text{mit}} = \frac{w}{100}$ In der Aufgabe steht: „...im 2. Fall ist sie 2 % von p größer“, also weiß man, dass $p_{\text{ohne}} \cdot 1,02 = p_{\text{mit}}$ sein muss. HINWEIS: Zwei Prozent entspricht der Dezimalzahl 0,02. „2% größer“ ist ein Ganzes (also 100%) plus 2% also 102% oder ein Faktor 1,02 Einsetzen der Terme ergibt eine Gleichung mit einer Unbekannten, die man nach „w“ auflösen muss Die Kommazahl 1,02 als Bruch schreiben: $1,02 = \frac{102}{100}$ Mit den Nennern durchmultiplizieren, um die Bruchgleichung in eine ohne Brüche zu verwandeln.

Aufgabe 5

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$\binom{3}{2}$ gibt an, wie viele Möglichkeiten es gibt 2 Farben aus 3 möglichen auszuwählen	„Im Sachzusammenhang“ bedeutet, dass man auf die Situation in der Aufgabe eingehen muss. Es genügt dann z.B. nicht zu sagen „Anzahl der Möglichkeiten 2 auf 3 möglichen auswählen“, das wäre zu „allgemein“.
14 gibt die Anzahl an Tulpen in einer der beiden Farben an.	

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis		
7 Möglichkeiten	Rot 5	gelb 5	orange 5
	5	4	6
	5	6	4
	4	5	6
	4	6	5
	6	5	4
	6	4	5