

# Stochastik – 2021 Teil A - ohne Hilfsmittel

## Aufgabe 1 (Pflichtteil)

Die Vierfeldertafel gehört zu einem Zufallsexperiment mit Ereignissen A und B. Für die Wahrscheinlichkeit p gilt  $p \neq 0$ .

|           | B  | $\bar{B}$ |        |
|-----------|----|-----------|--------|
| A         | p  |           | 3p     |
| $\bar{A}$ |    |           | 1 – 3p |
|           | 4p |           |        |

- Vervollständigen Sie die Vierfeldertafel. Zeigen Sie, dass p nicht den Wert  $\frac{1}{5}$  haben kann.
- Für einen bestimmten Wert von p sind A und B stochastisch unabhängig. Ermitteln Sie diesen Wert von p.

3  
2  
5

## Aufgabe 2 (Pflichtteil)

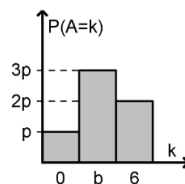
Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern  $n = 100$  und p. Der Erwartungswert von X ist 50.

- Berechnen Sie die Standardabweichung von X.
- Die Wahrscheinlichkeit  $P(X \geq 61)$  beträgt etwa 2 %. Bestimmen Sie unter Verwendung dieses Werts den zugehörigen Wert für die Wahrscheinlichkeit  $P(40 \leq X \leq 60)$ .

3  
2  
5

## Aufgabe 3 (Pflichtteil)

Bei einem Gewinnspiel beträgt der Einsatz für die Teilnahme 3 Euro. Die Auszahlung in Euro wird durch die Zufallsgröße A beschrieben. Die Abbildung zeigt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von A.



- Zeigen Sie, dass p den Wert  $\frac{1}{6}$  hat.
- Bei wiederholter Durchführung des Spiels ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen. Berechnen Sie den Wert von b.
- Beschreiben Sie, wie das Gewinnspiel unter Verwendung eines Behälters sowie roter, grüner und blauer Kugeln durchgeführt werden könnte.

1  
2  
2  
5

## Aufgabe 4 (Wahlteil - schwerer)

In einem Behälter befinden sich Kugeln, von denen jede dritte gelb ist.

- Aus dem Behälter wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind.
- Im Behälter werden zwei gelbe Kugeln durch zwei blaue Kugeln ersetzt. Anschließend wird aus dem Behälter erneut zweimal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide Kugeln gelb sind, beträgt nun  $\frac{1}{16}$ . Ermitteln Sie, wie viele gelbe Kugeln sich nach den beschriebenen Vorgängen im Behälter befinden.

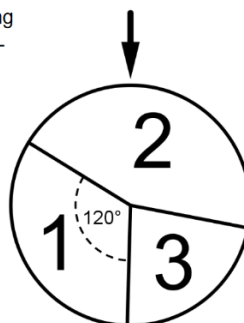
1  
4  
5

## Aufgabe 5 (Wahlteil – schwerer)

Für ein Spiel wird ein Glücksrad verwendet. Die Abbildung zeigt dieses Glücksrad schematisch. Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einmaligem Drehen die Zahl 2 zu erzielen, wird mit p bezeichnet.

Bei dem Spiel bezahlt jeder Spieler zunächst einen Einsatz von 1 Euro. Anschließend dreht er das Glücksrad zweimal. Erzielt er dabei zwei Zahlen, deren Summe mindestens 5 ist, wird ihm der Wert der Summe als Betrag in Euro ausgezahlt; ansonsten erfolgt keine Auszahlung. Wird das Spiel wiederholt durchgeführt, so ist zu erwarten, dass sich auf lange Sicht die Einsätze der Spieler und die Auszahlungen ausgleichen.

Leiten Sie unter Verwendung der beschriebenen Spielregeln eine Gleichung her, mit der der Wert von p berechnet werden könnte; erläutern Sie dabei Ihr Vorgehen.



5

## Lösung

### Aufgabe 1

a)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                     |    |           |      | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----|-----------|------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                      | B  | $\bar{B}$ |      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| A                                                                                    | p  | 2p        | 3p   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| $\bar{A}$                                                                            | 3p | 1-6p      | 1-3p |                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|                                                                                      | 4p | 1-4p      | 1    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| Für $p = \frac{1}{5}$ ist $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 - \frac{6}{5} = -\frac{1}{5}$ |    |           |      | <p>Wahrscheinlichkeiten sind immer größer oder gleich null.<br/>(Die Null ist in dieser Aufgabe sogar ausgenommen)</p> <p>HINWEIS:<br/>Bei solchen Aufgaben muss man einfach ein wenig probieren, bis man etwas findest, das den Vorgaben der Aufgabe oder der Mathematik im Allgemeinen widerspricht.</p> |

b)

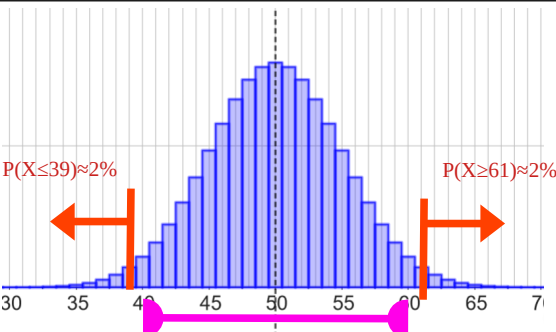
| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                          | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>Unabhängig, wenn</p> $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ $p = 3p \cdot 4p \quad   : p \neq 0$ $1 = 12p$ $\frac{1}{12} = p$ | <p>Wenn A und B stochastisch unabhängig sind, dann muss die Gleichung <math>P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)</math> erfüllt sein.</p> <p>Also beide Seiten aus der 4FT ablesen und nach p auflösen</p> <p>HINWEIS:<br/>Man darf nur durch p teilen, weil in der Ausgabe steht, dass es nicht null ist.</p> |

## Aufgabe 2

a)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                                                                    | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mu = n \cdot p$<br>$50 = 100 \cdot p$<br>$p = 0,5$<br>$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$<br>$= \sqrt{100 \cdot 0,5 \cdot (1-0,5)}$<br>$= \sqrt{25}$<br>$= 5$ | <p>Der Erwartungswert der Binomialverteilung ist definiert als <math>\mu = n \cdot p</math></p> <p>HINWEIS:<br/> Die Standardabweichung ist definiert als <math>\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}</math><br/> wegen <math>\mu = n \cdot p</math><br/> könnte man das auch so schreiben: <math>\sigma = \sqrt{\mu \cdot (1-p)}</math></p> |

b)

| Was aufgeschrieben werden sollte                 | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
|--------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $P(40 \leq X \leq 60) = 1 - 2 \cdot 0,02 = 0,96$ |  <p>HINWEIS:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>Für <math>p=0,5</math> ist JEDE die Binomialverteilung symmetrisch zur Gerade durch den Erwartungswert.</li> </ul> <p>Da X zwischen <b>40 und 60</b> liegen soll sind die gesuchten X-Werte ebenfalls symmetrisch um den Erwartungswert.</p> <p><b>Alle Balken</b> zusammengenommen ergeben die Wahrscheinlichkeit 1.<br/> Zieht man von 1 die beiden roten Bereiche links und rechts ab erhält man die Wahrscheinlichkeit für <b><math>P(40 \leq X \leq 60) = 1 - 2 \cdot 0,02 = 0,96</math></b></p> |

### Aufgabe 3

a)

| Was aufgeschrieben werden sollte     | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                             |
|--------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $p+2$ $p+3$ $p=1$<br>$p=\frac{1}{6}$ | Eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit für alle möglichen Ergebnisse an. Summiert man diese auf (alle Balken addieren ;-)) dann MUSS man 1 erhalten. |

b)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                       | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| E: Erwartungswert der Auszahlung                                                                       | HINWEISE: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Formulierungen wie „...zu erwarten.“ oder „... durchschnittlich.“, „... auf lange Sicht...“ weisen auf den Erwartungswert hin.</li> <li>• Gerade bei Stochastikaufgaben ist es wichtig genau zu definieren, was gemeint ist.</li> <li>• Wenn, wie in Aufgabenteil a), die Formulierung „Zeigen Sie...“ auftritt, kann/darf man davon ausgehen, dass der Wert korrekt ist und MAN DARF IHN VERWENDEN.</li> </ul> |
| $E = 3$                                                                                                | Die Aussage „... auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen.“ bedeutet, dass es ein „faires Spiel“ sein soll.<br>Die zu erwartende Auszahlung muss gleich dem Einsatz pro Spiel sein.                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| $\frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{3}{6} \cdot b + \frac{2}{6} \cdot 6 = 3$<br>$\frac{1}{2}b = 1$<br>$b = 2$ | Der Erwartungswert ist definiert als<br>$E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots$<br>Den Wert kennen wir aus Aufgabenteil a)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |

c)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                                                                                                                        | Kommentare – nur zum Verständnis |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| Es müssen 1 rote, 3 grüne und 2 blaue Kugel in Behälter sein. Man zieht blind eine Kugel, ist sie blau bekommt man 6€, ist sie grün bekommt man 2€, bei rot geht man leer aus.<br>Pro Spiel muss man 3€ Einsatz zahlen. |                                  |

## Aufgabe 4

a)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                       | Kommentare – nur zum Verständnis |
|------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|
| $P(\text{„2 mal gelb“}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$ |                                  |

b)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>g: Anzahl gelber Kugeln<br/>n: Kugeln insgesamt</p> <p><math>g = \frac{n}{3} - 2</math></p> <p><math>P(\text{„2 mal gelb“}) = \frac{1}{16}</math></p> <p><math>\frac{g}{n} \cdot \frac{g}{n} = \frac{1}{16}</math></p> <p><math>\frac{g^2}{n^2} = \frac{1}{16}</math></p> <p><math>g^2 = \frac{1}{16} n^2</math></p> <p><math>g = \frac{n}{4}</math></p> <p><math>\frac{n}{3} - 2 = \frac{n}{4} \quad   \cdot 12</math></p> <p><math>4n - 24 = 3n</math><br/><math>n = 24</math></p> <p><math>g = \frac{n}{4} = \frac{24}{4} = 6</math></p> <p>Es sind 6 gelbe Kugeln im Behälter.</p> | <p>Aus Teil a) wissen wir, dass (vor dem Austausch) jede dritte Kugel gelb war.</p> <p>Wenn jede dritte Kugel gelb ist, kann man die Anzahl der gelben Kugeln mit <math>n/3</math> berechnen.</p> <p>Ersetzt man dann zwei gelbe durch zwei blaue, sind es zwei gelbe weniger, also also müssen wir noch 2 von der Anzahl der gelben abziehen.</p> <p>Die Wahrscheinlichkeit eine gelbe zu ziehen kann man -wie immer- nach LaPlace berechnen – auch, wenn man die Anzahlen (also g und n) nicht kennt: <math>P(\text{„1 mal gelb“}) = \frac{n}{g}</math></p> <p>Die Aufgabe sagt, dass die Wahrscheinlichkeit 2 gelbe Kugeln hintereinander zu ziehen <math>1/16</math> ist.</p> <p>Diese Gleichung hat zwei Unbekannte ... also lösen wir nach einer auf (welche ist eigentlich egal)</p> <p>Jetzt hat man 2 Gleichungen (blau und grün) und zwei Unbekannte (g und n).</p> <p>Das kann man durch das Gleichsetzungs- oder Einsetzungs-Verfahren lösen (ich setze hier mal gleich, weil beide schon nach g aufgelöst sind)</p> <p>Jetzt hat man eine Gleichung mit einer Unbekannten (das „n“); nach der löst man auf<br/>Es gibt also insgesamt 24 Kugeln.</p> <p>Die Anzahl der gelben Kugeln können wir jetzt mit jeder der beiden Gleichungen für g (blau oder grün) berechnen.</p> |

## Aufgabe 5

a)

| Was aufgeschrieben werden sollte                                                                | Kommentare – nur zum Verständnis                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|-------|--------------|--------------------|----------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|------------|---|---|---|
| E=1                                                                                             | Formulierungen wie „...zu erwarten..“ oder „... durchschnittlich..“ , „... auf lange Sicht...“ weisen auf den Erwartungswert hin.                                                                                                                                                                                                                        |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
|                                                                                                 | Die Aussage „ ... auf lange Sicht Einsätze und Auszahlungen ausgleichen.“ bedeutet, dass es ein „faïres Spiel“ sein soll.<br>Die zu erwartende Auszahlung muss gleich dem Einsatz pro Spiel sein.                                                                                                                                                        |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
| $P(„1“)=\frac{1}{3}$                                                                            | 120° ist gerade ½ eines Kreises : $\frac{123^{\circ}}{360^{\circ}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
| $P(„2“)=p$                                                                                      | Das war angegeben, p steht für irgendeine Zahl (zwischen 0 und 1;-)                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
| $P(„3“)=1-p-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}-p$                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
|                                                                                                 | <table><tr><td>Ereignis</td><td>(2;3) ; (3;2)</td><td>(3;3)</td><td>Alle anderen</td></tr><tr><td>Wahrscheinlichkeit</td><td><math>2 \cdot p \cdot \left(\frac{2}{3}-p\right)</math></td><td><math>\left(\frac{2}{3}-p\right)^2</math></td><td>Egal, wegen den 0€ Auszahlung</td></tr><tr><td>Auszahlung</td><td>5</td><td>6</td><td>0</td></tr></table> | Ereignis                       | (2;3) ; (3;2)                 | (3;3) | Alle anderen | Wahrscheinlichkeit | $2 \cdot p \cdot \left(\frac{2}{3}-p\right)$ | $\left(\frac{2}{3}-p\right)^2$ | Egal, wegen den 0€ Auszahlung | Auszahlung | 5 | 6 | 0 |
| Ereignis                                                                                        | (2;3) ; (3;2)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | (3;3)                          | Alle anderen                  |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
| Wahrscheinlichkeit                                                                              | $2 \cdot p \cdot \left(\frac{2}{3}-p\right)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | $\left(\frac{2}{3}-p\right)^2$ | Egal, wegen den 0€ Auszahlung |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
| Auszahlung                                                                                      | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 6                              | 0                             |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
|                                                                                                 | Die „2.“ in der zweiten Spalte kommt daher, dass man die beide Zahlen in verschiedenen Reihenfolgen bekommen könnte (ein „ODER“-Ereignis)                                                                                                                                                                                                                |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
| $2 \cdot p \cdot \left(\frac{2}{3}-p\right) \cdot 5 + \left(\frac{2}{3}-p\right)^2 \cdot 6 = 1$ | Der Erwartungswert ist definiert als<br>$E=p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots$                                                                                                                                                                                                                                                                        |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
|                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |
|                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                                |                               |       |              |                    |                                              |                                |                               |            |   |   |   |