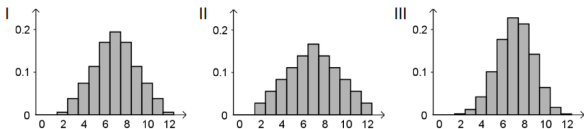


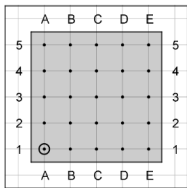
Aufgabe 1 (Pflichtteil)

- Gegeben sind die im Folgenden beschriebenen Zufallsgrößen X und Y:
- Ein Würfel, dessen Seiten mit den Zahlen von 1 bis 6 durchnummeriert sind, wird zweimal geworfen. X gibt die dabei erzielte Augensumme an.
 - Aus einem Behälter mit 60 schwarzen und 40 weißen Kugeln wird zwölfmal nacheinander jeweils eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt. Y gibt die Anzahl der entnommenen schwarzen Kugeln an.
- a Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit $P(X = 4)$ mit der Wahrscheinlichkeit $P(X = 10)$ übereinstimmt.
- b Die Wahrscheinlichkeitsverteilungen von X und Y werden jeweils durch eines der folgenden Diagramme I, II und III dargestellt. Ordnen Sie X und Y jeweils dem passenden Diagramm zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.



Aufgabe 2 (Pflichtteil)

- Die Abbildung zeigt ein Spielfeld und eine Spielfigur, die sich zu Beginn jedes Spiels – wie abgebildet – auf dem Startpunkt (A | 1) befindet. Die Figur wird bei jedem Zug von einem Punkt zu einem anderen verschoben; jeder Zug wird durch das Werfen eines Würfels bestimmt.
- Der Tabelle kann entnommen werden, wie die Seiten des Würfels beschriftet sind; außerdem ist für jede Seite des Würfels angegeben, welcher Spielzug ausgeführt wird, wenn bei einem Wurf diese Seite erzielt wird.



Beschriftung der Seite	Anzahl der Seiten mit dieser Beschriftung	Spielzug
rechts	2	→
oben	3	↑
rechts oben	1	↗

- a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Spielfigur vom Startpunkt ausgehend im Laufe eines Spiels den Punkt (A | 4) erreicht.
- b Begründen Sie, dass sich mit dem Term $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$ die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen lässt, dass die Spielfigur vom Startpunkt ausgehend im Laufe eines Spiels einen bestimmten Punkt erreicht. Geben Sie die Koordinaten dieses Punkts an.

Aufgabe 3 (Pflichtteil)

- Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion der normalverteilten Zufallsgröße A.
-
- a Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A einen Wert aus dem Intervall $[6; 10]$ annimmt, beträgt etwa 68 %. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass A einen Wert annimmt, der größer als 10 ist.
- b Die Zufallsgröße B ist ebenfalls normalverteilt; der Erwartungswert von B ist ebenso groß wie der Erwartungswert von A, die Standardabweichung von B ist größer als die Standardabweichung von A. Skizzieren Sie in der Abbildung einen möglichen Graphen der Dichtefunktion von B.

Aufgabe 4 (Wahlteil - schwerer)

- Für ein Spiel wird ein Behälter mit 100 Kugeln gefüllt. Dafür stehen rote und blaue Kugeln zur Verfügung. Vor jedem Spiel legt der Spieler die Anzahl der blauen Kugeln im Behälter fest. Anschließend wird dem Behälter eine Kugel zufällig entnommen. Ist diese Kugel rot, so wird dem Spieler die festgelegte Anzahl blauer Kugeln in Cent ausbezahlt; ist die Kugel blau, so beträgt die Auszahlung 10 Cent. Ermitteln Sie, wie der Spieler die Anzahl blauer Kugeln für ein Spiel festlegen muss, damit der Erwartungswert der Auszahlung möglichst groß ist.

Aufgabe 5 (Wahlteil – schwerer)

- Die Seiten eines Würfels sind jeweils mit einer der Zahlen 1, 2 und 3 beschriftet, wobei jede der Zahlen zweimal vorkommt.
- a Der Würfel wird dreimal geworfen. Begründen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es wird dreimal die gleiche Zahl erzielt.“ halb so groß ist wie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Es werden drei verschiedene Zahlen erzielt“.
- b Der Würfel wird sechsmal geworfen. Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden könnte, dass nicht jede Zahl zweimal erzielt wird.

Lösung

Aufgabe 1

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$X=4$ für $\{ (1;3) ; (2;2) ; (3;1) \}$ $X=10$ für $\{ (4;6) ; (5;5) ; (6;4) \}$ Gleich viele Ergebnisse in den beiden Ereignis und die Wahrscheinlichkeit jeder Augenzahl 1-6 ist ebenfalls gleich.	HINWEIS: Wenn verschiedene Zufallsvariablen (X und Y) verwendet werden sind auch zwei verschiedene Zufallsexperimente gemeint. (oder zumindest unterschiedliche Voraussetzungen oder Abläufe innerhalb eines Zufallsexperiments gemeint) HINWEIS: • Ereignisse sind Mengen, deswegen die geschweiften Klammern • Die Ergebnisse sollten in runde Klammern geschrieben werden

b)

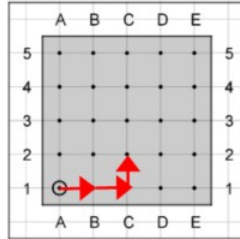
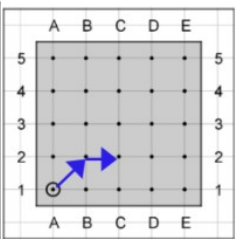
Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
Würfel: • Verteilung muss symmetrisch sein • $X=2$ für $\{ (1;1) \}$ $X=4$ für $\{ (1;3) ; (2;2) ; (3;1) \}$ $P(X=4)$ muss 3 mal so groß sein wie $P(X=2)$ → Verteilung II Kugeln: Verteilung darf nicht symmetrisch sein → Verteilung III	HINWEIS: In Teil a) „steht geschrieben“, dass $P(X=4) = P(X=10)$ ist, auch, wenn man weiß, dass die Verteilung für die Summe der Augenzahlen von zwei Würfeln insgesamt symmetrisch sein muss, weiß man immerhin, dass diese beiden Wahrscheinlichkeiten gleich sein müssen, das ist nur bei I und II der Fall Eine Binomialverteilung ist nur dann symmetrisch, wenn die Wahrscheinlichkeit $p=0,5$ ist. Hier ist die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugeln zu ziehen $p=0,6$, weil von 100 Kugeln 60 schwarz sind.

Aufgabe 2

a)

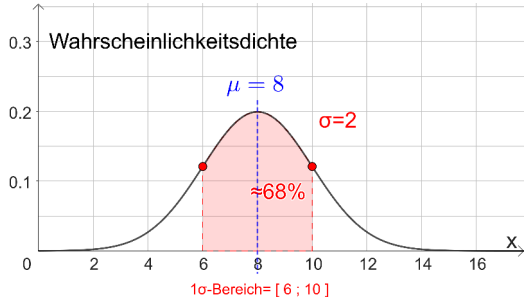
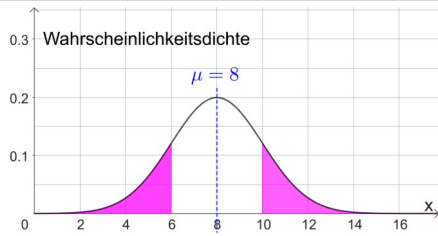
Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$P = \left(\frac{3}{6}\right)^3$	Analyse: Um von (A 1) zu (A 4) zu kommen, muss man 3 mal nach oben laufen. Die einfachste Möglichkeit wäre also 3 mal hintereinander „oben“ zu würfeln Die Möglichkeit „oben“ gibt es laut Tabelle 3 mal von insgesamt 6 Seiten des Würfels HINWEIS: In einer allgemeineren Aufgabe müsste man -zusätzlich zu den „3 mal oben“- noch andere Zug-Kombinationen, die sich gegenseitig aufheben, z.B. „oben + unten“ oder „links + rechts“. Zum Glück sind in der Aufgabe solche Zug-Kombinationen nicht möglich.

b)

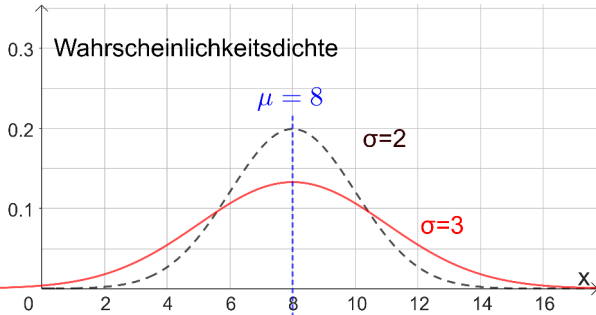
Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
Das zwei Terme addiert werden, bedeutet, dass zwei verschieden Zugkombinationen betrachtet werden: - Eine mit $P = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$ in der zwei mal „rechts“ und einmal „oben“ nacheinander aber in beliebiger Reihenfolge vorkommen. - Eine mit $P = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}$ in der einmal „rechts oben“ und einmal „rechts“ nacheinander aber in beliebiger Reihenfolge vorkommen. Es wird die Wahrscheinlichkeit berechnet zum Punkt (C 2) zu kommen.	HINWEIS: Bei solchen Aufgaben muss man im Prinzip „jede Zahl und jede mathematisch Operation“ erklären. Mathematische Operationen sind z.B. „+“, „hoch 2“, Binomialkoeffizient; Brüche Man kann allerdings logisch zusammenhängende Terme zusammenfassen $3 \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}}_{\text{Kombination 1}} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3}}_{\text{Kombination 2}}$ Zwei verschiedene Kombinationen, wegen des „+“ Erklärung - die „3·“ zeigt, dass es drei verschiedene mögliche Reihenfolgen gibt und, dass es egal ist welche auftritt („ODER_Ereignis“). - Die „hoch 2“ besagt, dass zwei mal ein Zug zweimal vorkommt („UND_Ereignis“). - Die Brüche stehen für die einzelnen Züge in der Tabelle. Man könnte den Ausdruck ausführlich so schreiben $P = 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ Das Ereignis wäre: { (r;r;o) ; (r;o;r) ; (o;r;r) } Erklärung ... wie oben ;-) die ausführliche Schreibweise wäre $P = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}$ Das Ereignis wäre: { (c;r) ; (r;c) }  

Aufgabe 3

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$P(X \geq 10) = \frac{1 - 0,68}{2} = 0,16$	 HINWEISE: - Die Normalverteilung ist IMMER symmetrisch zur Gerade durch den Erwartungswert μ - Die FLÄCHE unter der Kurve gibt die Wahrscheinlichkeit an, es müssen also immer BEREICHE betrachtet werden - Der 1σ-Bereich (oben rot markiert) erstreckt sich zu BEIDEN SEITEN des Erwartungswerts: er ist beginnt bei $\mu - \sigma$ und geht bis $\mu + \sigma$. - Der 1σ-Bereich deckt IMMER etwa 68% der Ergebnisse um den Erwartungswert ab. - Der 1σ-Bereich lässt NÄHERUNGSWEISE grafisch BESTIMMEN: Er liegt zwischen den Wendepunkten der Normalverteilung.  Die gesamte Fläche unter der Normalverteilung ist exakt 1. Zieht man davon die in der Aufgabe gegebenen 0,68 für den Bereich [6;10] ab erhält man die pink eingefärbte Fläche. Da die Normalverteilung symmetrisch zur Gerade durch den Erwartungswert ist kann man das durch zwei teilen, um den rechten Teil der Fläche zu erhalten.

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
	Die Angabe der Standardabweichung ist nicht gefordert, hab ich nur zu besseren Übersicht dazu geschrieben Die rote Kurve ist das, was man zeichnen müsste, das kann man im ABI einfach in die gegebene Zeichnung malen. HINWEISE: - Bei gleichem Erwartungswert muss das Maximum der Normalverteilung beim gleichen X-Wert liegen. - Die Kurve muss breiter sein, weil die Standardabweichung (und damit der 1σ-Bereich) größer wird. - Das Maximum muss niedriger liegen, da die Fläche unter der Kurve gleich bleiben muss (nämlich immer genau 1,0)

Aufgabe 4

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis									
n=100 Anzahl aller Kugeln r rote b blaue	HINWEIS: „größtmöglich“ und „kleinstmöglich“ weisen auf die Berechnung von Extrema hin ;-) Informationen aus der Aufgabenstellung									
	<table><tr><td>Ereignis</td><td>blau</td><td>rot</td></tr><tr><td>Wahrscheinlichkeit</td><td>$\frac{b}{100}$</td><td>$\frac{r}{100}$</td></tr><tr><td>Auszahlung</td><td>10 Ct</td><td>b Ct</td></tr></table>	Ereignis	blau	rot	Wahrscheinlichkeit	$\frac{b}{100}$	$\frac{r}{100}$	Auszahlung	10 Ct	b Ct
Ereignis	blau	rot								
Wahrscheinlichkeit	$\frac{b}{100}$	$\frac{r}{100}$								
Auszahlung	10 Ct	b Ct								
$E = \frac{b}{100} \cdot 10 + \frac{r}{100} \cdot b$	Der Erwartungswert ist definiert als $E = p_1 \cdot x_1 + p_2 \cdot x_2 + \dots$									
$r = 100 - b$	Wir sollen die Anzahl der blauen Kugeln herausfinden, also versuchen wir, alle „r“ durch etwas anderes auszudrücken.									
$E = \frac{b}{100} \cdot 10 + \frac{100 - b}{100} \cdot b$ $= \frac{b}{10} + \left(\frac{100}{100} - \frac{b}{100} \right) \cdot b$ $= \frac{b}{10} + 1 \cdot b - \frac{b^2}{100}$ $= \frac{11}{10} b - \frac{1}{100} b^2$	Das „r“ ersetzen und den Ausdruck so weit wie möglich vereinfachen Jetzt haben wir eine Funktion, die den Erwartungswert in Abhängigkeit von der Anzahl der blauen Kugeln b angibt. Die Variable ist also „b“ und wir müssten eigentlich $E(b) = \dots$ schreiben									
$E'(b) = \frac{11}{10} - 2 \cdot \frac{1}{100} b$ $= \frac{11}{10} - \frac{1}{50} b$	Wir sollen b so bestimmen, „... damit der Erwartungswert ... möglichst groß wird.“; wir brauchen also das Maximum einer Funktion Wie üblich bei Extrema: Ableitung(en) bilden: $E'(b)$									
$E''(b) = -\frac{50}{100}$	Notwendige Bedingung: $E'(b) = 0$									
$E'(X) = 0$ $\frac{11}{10} - \frac{1}{50} b = 0$ $-\frac{1}{50} b = -\frac{11}{10}$ $b = \frac{550}{10}$ $b = 55$	- hinreichende Bedingung: Wert von E'' (oder VZW von E') - Die zweite Ableitung ist hier immer negativ, weil ja kein „b“ darin vorkommt.									
$E''(55) = -\frac{50}{100} < 0 \rightarrow \text{Maximum}$										
Die größte Auszahlung erhält man bei 55 blauen Kugeln	Antwort noch aufschreiben									

Aufgabe 5

a)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
„drei mal die gleiche“ hat 3 Möglichkeiten: $\{ (1;1;1) ; (2;2;2) ; (3;3;3) \}$ „drei verschiedene“ besteht aus den Zahlen $(1;2;3)$ und allen unterschiedlichen Anordnungen → 6 Möglichkeiten	Man kann 3 verschiedene Zahlen auf $3!=1 \cdot 2 \cdot 3=6$ Arten anordnen (das nannten wir „Permutationen“ Allgemein: Eine Menge mit n verschiedenen Elementen hat n! Permutationen.

b)

Was aufgeschrieben werden sollte	Kommentare – nur zum Verständnis
$P=1-\bar{A}$ $P=1-\binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \binom{4}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \binom{2}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^2$	Die Formulierung „... dass nicht jede Zahl zweimal ...“ gibt schon einen Hinweis auf den Lösungsweg: Das GEGENEREIGNIS. Am besten man versucht sich das Gegenereignis mal so einfach wie möglich vorzustellen: Wenn jede Zahl zwei mal vorkommen soll, hätte man im einfachsten Fall das gewürfelt $1 \ 1 \ 2 \ 2 \ 3 \ 3$ Dafür wäre die Wahrscheinlichkeit so zu berechnen $P=\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$ Die Zahlen müssen natürlich nicht unbedingt so schön geordnet vorkommen, sondern können beliebig auf die 6 „Plätze“ verteilt werden – es gibt also nicht nur diese eine Möglichkeit ... Das bedeutet: die Reihenfolge muss nicht beachtet werden ... das schreit nach dem Binomialkoeffizienten: - Fangen wir mit den 2 Einsen an: Die Anzahl der Möglichkeiten 2 Einsen auf 6 freien Plätze unterzubringen ist $\binom{6}{2}$ - Jetzt haben wir noch 4 freie Plätze, um z.B. die 2 Zweier unterzubringen, diese Anzahl ist $\binom{4}{2}$ - und zum Schluss bleiben noch zwei Freien Plätze für die 2 Dreier, das wären $\binom{2}{2}$. HINWEIS: $\binom{2}{2}$ ist genau 1: Um 2 Dreier auf 2 freie Plätze zu legen gibt's nur genau eine Möglichkeit (eben die Dreier auf die freien Plätze zu legen ;-). - Das ist übrigens allgemein für n Elemente auf n Plätzen gültig: $\binom{n}{n}=1$ - Der andere „triviale“ Fall ist: beliebig viele Elemente auf 0 freie Plätze zu verteilen ... da gibt's auch nur eine Möglichkeit: $\binom{n}{0}=1$