

ABI 2023 – Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1-1 (leichter)

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die negative Zahl a . Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

- a Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann. 1
- b Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von X ist 4. Bestimmen Sie den Wert von a . 4

Aufgabe 1-2 (leichter)

Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit den Zahlen 2 bzw. 3 beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen die Zahl 2 erzielt wird, beträgt p . Bei einem Spiel dreht eine Person das Glücksrad genau so oft, bis die Summe der erzielten Zahlen 5, 6 oder 7 beträgt. Bei der Summe 6 gewinnt die Person das Spiel, sonst verliert sie.

- a Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar. 2
- b Die beiden folgenden Ereignisse sind stochastisch unabhängig: 3
 - E: „Beim ersten Drehen des Glücksrads wird die Zahl 2 erzielt.“
 - G: „Die Person gewinnt das Spiel.“Ermitteln Sie eine Gleichung, die die Variable p enthält und die Berechnung des Werts von p ermöglicht.

Aufgabe 2-1 (schwerer)

Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.

- a Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe. 2
- b Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird. 3

Aufgabe 2-2 (schwerer)

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

- a Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt. 2
- b Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind. 3

LÖSUNGEN ABI 2023 – Hilfsmittelfreier Teil

Aufgabe 1-1 (leichter)

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die negative Zahl a . Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

- | | |
|--|---|
| a Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann. | 1 |
| b Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von X ist 4. Bestimmen Sie den Wert von a . | 4 |

Das muss aufgeschrieben werden	Das sind nur Kommentare dazu												
a) Auf den beiden entnommenen Kugeln stehen unterschiedliche Zahlen.													
b)	Der Erwartungswert soll 4 sein, also muss gelten $E(X)=4$ Den Erwartungswert berechnet man über dafür muss man eine Tabelle mit Ereignissen e_i, Wert der Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeit des Ereignisses machen: <table><tr><td>e_i</td><td>(2;2)</td><td>(a;2) oder (2;a)</td><td>(a;a)</td></tr><tr><td>X</td><td>4</td><td>2a</td><td>a^2</td></tr><tr><td>P(X)</td><td>$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$</td><td>$2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$</td><td>$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$</td></tr></table> Und dann den Erwartungswert berechnen und gleich 4 setzen: $4 \cdot \frac{9}{25} + 2 \cdot a \cdot \frac{12}{25} + a^2 \cdot \frac{4}{24} = 4$ Die Gleichung muss nach a aufgelöst werden... Da im Text steht „... die negative Zahl a ...“ kann es nur die - 8 sein.	e_i	(2;2)	(a;2) oder (2;a)	(a;a)	X	4	2a	a^2	P(X)	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$
e_i	(2;2)	(a;2) oder (2;a)	(a;a)										
X	4	2a	a^2										
P(X)	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$	$2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$	$\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$										

Aufgabe 1-2 (leichter)

Ein Glücksrad besteht aus zwei Sektoren, die mit den Zahlen 2 bzw. 3 beschriftet sind. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Drehen die Zahl 2 erzielt wird, beträgt p . Bei einem Spiel dreht eine Person das Glücksrad genau so oft, bis die Summe der erzielten Zahlen 5, 6 oder 7 beträgt. Bei der Summe 6 gewinnt die Person das Spiel, sonst verliert sie.

a Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

2

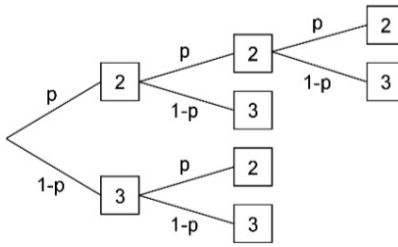
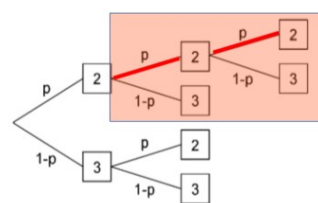
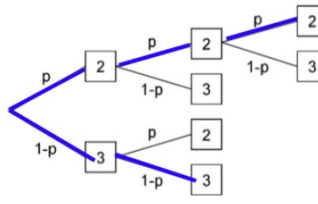
b Die beiden folgenden Ereignisse sind stochastisch unabhängig:

3

E: „Beim ersten Drehen des Glücksrads wird die Zahl 2 erzielt.“

G: „Die Person gewinnt das Spiel.“

Ermitteln Sie eine Gleichung, die die Variable p enthält und die Berechnung des Werts von p ermöglicht.

Das muss aufgeschrieben werden	Das sind nur Kommentare dazu
a) 	
b) $P_E(G) = P(G)$ $p^2 = p^3 + (1-p)^2$	„Stochastisch unabhängig“ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (G) nicht von der Wahrscheinlichkeit des anderen Ereignisses (E) abhängt. Mathematisch bedeutet das, dass die Wahrscheinlichkeit des bedingten Ereignisses $P_E(G)$ und die des Ereignisses selbst $P(G)$ identisch sein müssen. Das kann man als Gleichung schreiben: $P_E(G) = P(G)$ Jetzt bestimmt man die Wahrscheinlichkeiten. - Für $P_E(G)$ erhält man aus dem Baumdiagramm: $P_E(G) = p^2$,  Begründung: Das Ereignis E ist schon eingetreten (sieht man den dem Index E), es geht also nur noch um den rot hinterlegten Teil des Baumdiagramms. Außerdem geht es um $G =$ „die Person gewinnt“, es muss also in Summe eine 6 herauskommen. Das bedeutet es kann nur der rot markierte Pfad in Frage kommen und der hat die Wahrscheinlichkeit $P = p \cdot p$ - Für $P(G)$ erhält man aus dem Baumdiagramm: $P(G) = p^3 + (1-p)^2$,  Begründung: Es gibt die zwei blau gezeichneten Pfade um in Summe 6 zu erhalten.

Aufgabe 2-1 (schwerer)

Die vier Seiten eines regelmäßigen Tetraeders sind mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert. Das Tetraeder wird fünfmal geworfen.

- | | | |
|----------|--|---|
| a | Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $\left(\frac{3}{4}\right)^5$ berechnet werden kann, und begründen Sie Ihre Angabe. | 2 |
| b | Geben Sie einen Term an, mit dem die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet werden kann, dass jede Zahl mindestens einmal erzielt wird. | 3 |

<i>Das muss aufgeschrieben werden</i>	<i>Das sind nur Kommentare dazu</i>
a) Ereignis: „Es wird keinmal die Zahl 1 erzielt.“ Begründung: Bei jedem der fünf Würfe beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, nicht die Zahl 1 zu erzielen $\frac{3}{4}$.	
b) $\binom{5}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{4}$	1: irgendwas $\frac{3}{4}$: nicht die erste $\frac{1}{2}$: nicht die ersten beiden $\frac{1}{4}$: nicht die ersten 3 $\frac{1}{4}$: die erste Zahl nochmal $\binom{5}{2}$ aus den 5 Würfeln werden jeweils 2 (z.B. die erste und die letzte) ausgewählt

Aufgabe 2-2 (schwerere)

In einen leeren Behälter werden drei Kugeln gelegt. Dabei wird die Farbe jeder Kugel durch Werfen eines Würfels festgelegt, dessen Seiten mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind: Wird die „1“ oder die „2“ erzielt, wird eine gelbe Kugel gewählt, sonst eine schwarze.

- | | | |
|----------|--|---|
| a | Weisen Sie rechnerisch nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich nun mindestens zwei schwarze Kugeln im Behälter befinden, $\frac{20}{27}$ beträgt. | 2 |
| b | Aus dem Behälter werden zwei der drei Kugeln zufällig entnommen. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide entnommenen Kugeln schwarz sind. | 3 |

<i>Das muss aufgeschrieben werden</i>	<i>Das sind nur Kommentare dazu</i>
a) $3 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{20}{27}$	
b) $\frac{12}{27} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{8}{27} = \frac{12}{27}$	