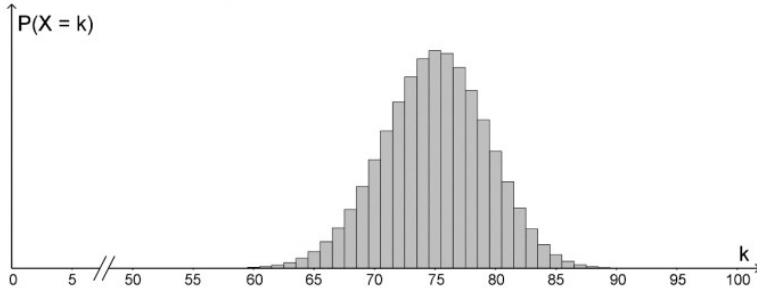


Aufgabe 1

Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt, wie oft dabei die Farbe „Blau“, die binomialverteilte Zufallsgröße Y , wie oft dabei die Farbe „Gelb“ erzielt wird.

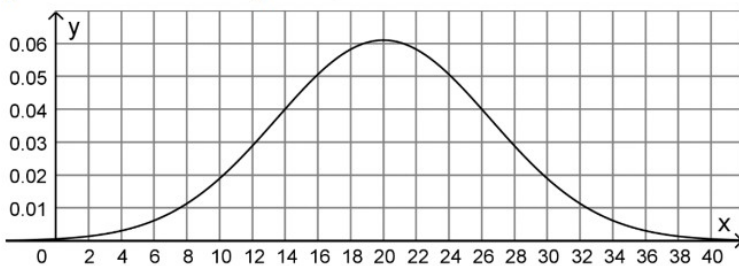
- a Begründen Sie, dass X und Y die gleiche Standardabweichung haben. 2
- b Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig. Die Abbildung zeigt Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X . 3



Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads.

Aufgabe 2

Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert 20.



- a Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert 14 annimmt. 1
- b Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass X einen Wert annimmt, der um mehr als 2 von 20 abweicht. Erläutern Sie die Überlegungen, die zur folgenden Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit führen: 4

$$P(18 \leq X \leq 20) \approx 2 \cdot 0,06 = 0,12;$$

$$\text{somit gilt: } P(|X - 20| > 2) \approx 1 - 2 \cdot 0,12 = 0,76$$

Aufgabe 5

Betrachtet wird ein Tetraeder, bei dem die Seiten mit den Zahlen 1 bis 4 durchnummeriert sind. Beim Werfen des Tetraeders werden alle Zahlen mit gleicher Wahrscheinlichkeit erzielt. Das Tetraeder wird viermal geworfen. Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Würfe, bei denen die Zahl 1 erzielt wird. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X ist in Abbildung 1 dargestellt.

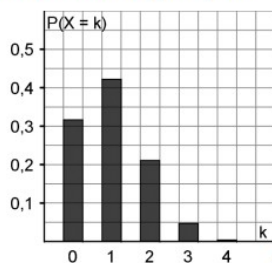


Abb. 1

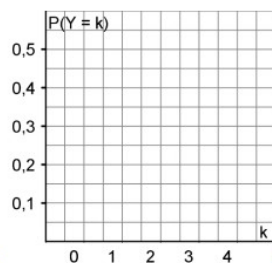


Abb. 2

- a Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl der Würfe an, bei denen die Zahl 1 nicht erzielt wird. Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von Y in Abbildung 2 dar. 2
- b Bei einem anderen Zufallsexperiment werden ein roter und ein grüner Würfel, bei denen die Seiten jeweils mit den Zahlen 1 bis 6 durchnummeriert sind, viermal gleichzeitig geworfen. Geben Sie zu diesem Zufallsexperiment eine Zufallsgröße Z an, die die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung hat wie X , und begründen Sie Ihre Angabe. 3

Aufgabe 3

Betrachtet werden drei Behälter A, B und C mit weißen und schwarzen Kugeln. Die Behälter sind von außen nicht unterscheidbar. Es gilt:

- ♦ Im Behälter A befinden sich dreimal so viele weiße wie schwarze Kugeln.
- ♦ Im Behälter B befinden sich 12 weiße und 4 schwarze Kugeln.
- ♦ Im Behälter C befinden sich 3 schwarze Kugeln und weiße Kugeln, deren Anzahl mit w bezeichnet wird.

Bei einem Spiel wird einer der drei Behälter zufällig ausgewählt und anschließend daraus eine Kugel zufällig gezogen. Ist bei diesem Spiel die gezogene Kugel schwarz, kann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Behälter C ausgewählt wurde, mit dem

Term $\frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{w+3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{w+3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}$ berechnet werden. Weisen Sie dies nach und berechnen Sie w ,

wenn die beschriebene Wahrscheinlichkeit den Wert $\frac{1}{5}$ hat.

5

Aufgabe 4

Die drei nicht sichtbaren Seiten des abgebildeten Würfels sollen jeweils mit einer der Zahlen 3, 4, 5 oder 6 beschriftet werden. Dabei können Zahlen auch mehrfach verwendet werden.

Nach der Beschriftung soll der Würfel folgende Eigenschaften haben:

- ♦ Beim einmaligen Werfen ist der Erwartungswert für die erzielte Zahl gleich 4.
- ♦ Auf den sechs Seiten des Würfels kommen genau drei verschiedene Zahlen vor.
- ♦ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt $\frac{1}{2}$.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die nicht sichtbaren Seiten des Würfels so zu beschriften, dass er alle drei Eigenschaften besitzt.



5

Lösung Nr 1

	BE
a Ist beim einmaligen Drehen p die Wahrscheinlichkeit dafür, „Blau“ zu erzielen, dann ist $1 - p$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dabei „Gelb“ zu erzielen. Somit ist $\sqrt{100 \cdot p \cdot (1 - p)}$ die Standardabweichung sowohl von X als auch von Y .	2
b Der Abbildung ist zu entnehmen, dass 75 der Erwartungswert von X ist. Ist b die Anzahl der blau eingefärbten Sektoren, so ist $75 = 100 \cdot \frac{b}{20} \Leftrightarrow b = 15$.	3
	5

Lösung Nr 2

	BE
a $P(X = 14) = 0$	1
b Der Inhalt der Fläche, die der Graph der Dichtefunktion mit der x -Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 18$ und $x = 20$ einschließt, ist etwa gleich dem Inhalt eines Rechtecks mit der Breite 2 und der Höhe 0,06. Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit $P(18 \leq X \leq 20)$ etwa 0,12. Aufgrund der Symmetrie des Graphen ergibt sich $P(X - 20 > 2) = 1 - 2 \cdot P(18 \leq X \leq 20)$.	4
	5

Lösung Nr 3

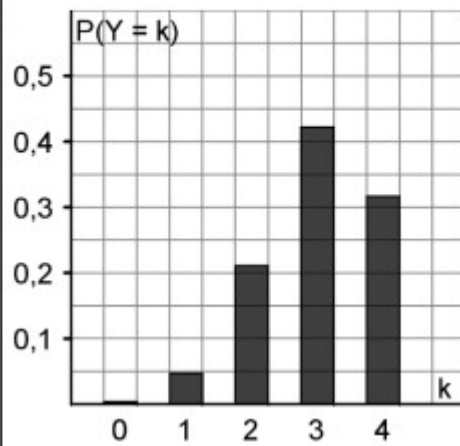
	BE
C: „Der zufällig ausgewählte Behälter ist Behälter C.“ S: „Die zufällig entnommene Kugel ist schwarz.“ Aus $P(C) = \frac{1}{3}$, $P_C(S) = \frac{3}{w+3}$ und $P_{\bar{C}}(S) = \frac{1}{4}$ folgt $P_S(C) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{w+3}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{w+3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}$. $P_S(C) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5 \cdot \frac{1}{w+3} = \frac{1}{w+3} + \frac{1}{6} \Leftrightarrow 30 = 6 + w + 3 \Leftrightarrow w = 21$	5

Lösung Nr 4

	BE
Aus dem angegebenen Erwartungswert von 4 ergibt sich für die Summe der drei Zahlen auf den nicht sichtbaren Seiten der Wert 13. Werden diese mit den Zahlen 3, 5 und 5 beschriftet, treffen die ersten zwei Aussagen zu und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt $\frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.	5

Lösung Nr 5

a



2

b Z: Anzahl der Würfe, bei denen keine der beiden erzielten Zahlen größer als drei ist.

3

Begründung: Beim einmaligen Werfen der beiden Würfel gibt es bei Verwendung des Ergebnisraums $\{(1;1), (1;2), \dots, (2;1), \dots, (6;6)\}$ insgesamt 36 Ergebnisse, die alle gleich wahrscheinlich sind. Bei neun dieser Ergebnisse ist keine der beiden erzielten Zahlen größer als drei. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „Keine der beiden erzielten Zahlen ist größer als drei.“ beträgt somit $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$. Damit sind X und Z beide binomialverteilt mit den Parametern $p = \frac{1}{4}$ und $n = 4$.

5