

Anforderungsniveau
erhöhtPrüfungsteil
BSachgebiet
AG/LA (A2)digitales Hilfsmittel
WTR**1 Aufgabe**

Gegeben sind die Punkte $A(5|-5|12)$, $B(5|5|12)$ und $C(-5|5|12)$.

- a** Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichschenkelig ist.
- b** Begründen Sie, dass A, B und C Eckpunkte eines Quadrats sein können, und geben Sie die Koordinaten des vierten Eckpunkts D dieses Quadrats an.

Im Folgenden wird die abgebildete Doppelpyramide betrachtet. Die beiden Teilpyramiden ABCDS und ABCDT sind gleich hoch. Der Punkt T liegt im Koordinatenursprung, der Punkt S ebenfalls auf der z-Achse.

Die Seitenfläche BCT liegt in einer Ebene E.

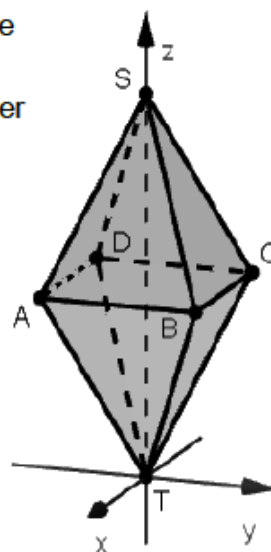
- c** Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $12y - 5z = 0$)

- d** Bestimmen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenfläche BCT mit der Fläche ABCD einschließt.

E gehört zur Schar der Ebenen $E_k: ky - 5z = 5k - 60$ mit $k \in \mathbb{R}$.

- e** Alle Ebenen der Schar schneiden sich in einer Geraden. Weisen Sie nach, dass die Kante $\overline{BC}$ auf dieser Geraden liegt.



- f** Ermitteln Sie diejenigen Werte von k , für die E_k mit der Seitenfläche ADS mindestens einen Punkt gemeinsam hat.
- g** Die Seitenfläche ADT liegt in der Ebene F. Geben Sie einen Normalenvektor von F an und begründen Sie Ihre Angabe, ohne die Koordinaten von A und D zu verwenden. Bestimmen Sie denjenigen Wert von k , für den E_k senkrecht zu F steht.
- h** Die Doppelpyramide wird so um die x-Achse gedreht, dass die bisher mit BCT bezeichnete Seitenfläche in der xy-Ebene liegt und der bisher mit S bezeichnete Punkt eine positive y-Koordinate hat. Bestimmen Sie diese y-Koordinate und veranschaulichen Sie Ihr Vorgehen durch eine Skizze.

BE

2

3

3

3

2

4

4

4

25

Lösungen

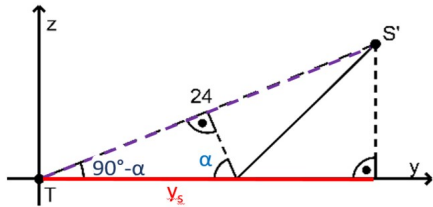
		BE
a	$\overline{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{BC} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ d. h. } \overline{AB} = \overline{BC} $	2
b	Wegen $\overline{AB} \circ \overline{BC} = 0$ schließen die gleich langen Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$ einen rechten Winkel ein. $D(-5 -5 12)$	3
c	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ -12 \end{pmatrix}$ liefert $x = -10r - 5s$, $y = -5s$ und $z = -12s$. Damit ergibt sich $12y - 5z = 0$.	3
d	$\cos(\alpha) = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 } \text{ mit } \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\text{und } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\cos(\alpha) = \frac{ -5 }{1 \cdot 13} \rightarrow \alpha \approx 67,380^\circ$	Aus der Formelsammlung die Formel für den Schnittwinkel zweier Ebenen $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -5 \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor der Ebene E $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist der Normalenvektor der Ebene in der ABCD liegt Falls Du $\alpha \approx 1,176$ heraus bekommst, hast Du im Bogenmaß gerechnet. (Entweder ins Gradmaß umstellen oder „1,176 rad“ schreiben)
e	B in E_k? $k \cdot (5) - 5 \cdot (12) = 5 \cdot k - 60 \leftrightarrow -60 = -60 \text{ w.A.}$ C in E_k? $k \cdot (5) - 5 \cdot (12) = 5 \cdot k - 60 \leftrightarrow -60 = -60 \text{ w.A.}$ B und C sind unabhängig von k in allen Ebenen der Schar enthalten.	Eine Punktprobe mit B und C in der Ebenenschar liefert eine wahre Aussage, die unabhängig vom Parameter k ist. Das bedeutet, - dass B und C in JEDER Ebene der Schar enthalten sind - dass sich die Ebenen alle in einer Gerade schneiden, die durch diese beiden Punkte geht.
f	Spurpunkt mit der z-Achse: $x=y=0 \rightarrow k \cdot (0) - 5 \cdot z = 5 \cdot k - 60$ $\rightarrow -5z = 5k - 60$ $\rightarrow z = -k + 12$ Für $k=0$ schneidet die Schar die Seitenfläche im Punkt S Für $k = 12$ schneidet die Schar die Seitenfläche in ABCD	Alle Ebenen der Schar gehen durch die Kante BC der Pyramide (s. Aufgabentext). Mit Veränderung von k dreht sich die Ebene um die Achse durch BC (s. Animation -Y QR—Code)  Man muss also „nur“ das k für diese beiden Ebenen ermitteln: - Die Ebene, die durch den höchsten Punkt geht (S), den die hat genau einen Schnittpunkt mit der Seitenebene (nämlich S) - Die Ebene, die in der das Quadrat ABCD liegt, denn das ist die die letzte Ebene, die noch einen Schnittpunkt mit der Seitenfläche hat.

g

Da sich F durch Spiegelung an der xz-Ebene aus E ergibt, ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von F.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ k \\ -5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ -5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow k = \frac{25}{12}$$

h



$$y_s = 24 \cdot \cos(90^\circ - 67,380) \approx 22,2$$

Die Skizze zeigt die Mittellinie der Doppelpyramide nach dem die Pyramide so gedreht wurde, wie angegeben.

Die gesuchte y-Koordinate von S' erhalten wir mit Hilfe der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{\text{ankath.}}{\text{hypotenuse}} = \frac{y_s}{24} \rightarrow y_s = 24 \cdot \cos(90^\circ - \alpha)$$

Den Winkel „ $90^\circ - \alpha$ “ erhält man aus folgenden Fakten:

- Die Summe aller Innenwinkel eines Dreiecks sind 180°
- Das Dreieck hat einen rechten Winkel (den unter der „24“)
- Der Winkel α ist genau der in Teilaufgabe c) berechnete Wert für den Winkel zwischen der Seitenfläche und der quadratischen Grundfläche.