

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2022

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

Für $k \in \mathbb{R}$ mit $0 < k \leq 6$ werden die Pyramiden $ABCD_k$ mit $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(4 \mid 0 \mid 0)$, $C(0 \mid 4 \mid 0)$ und $D_k(0 \mid 0 \mid k)$ betrachtet (vgl. Abbildung 1).

- a Begründen Sie, dass das Dreieck BCD_k gleichschenkelig ist.

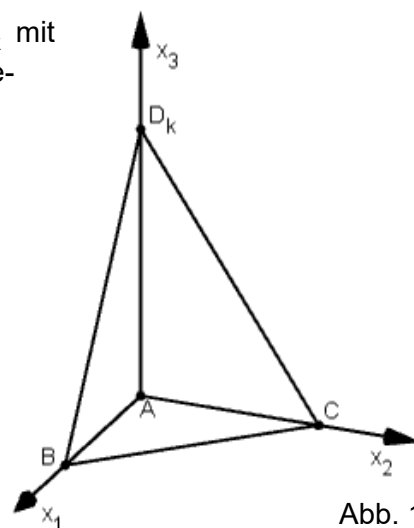


Abb. 1

- b Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{BC}$ ist $M(2 \mid 2 \mid 0)$. Begründen Sie, dass $\left| \overrightarrow{MD_k} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} \right|$ die Länge einer Höhe des Dreiecks BCD_k ist. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks BCD_k .

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

Für jeden Wert von k liegt die Seitenfläche BCD_k in der Ebene L_k .

c Bestimmen Sie eine Gleichung von L_k in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $x_1 + x_2 + \frac{4}{k} \cdot x_3 = 4$)

d Ermitteln Sie denjenigen Wert von k , für den die Größe des Winkels, unter dem die x_3 -Achse die Ebene L_k schneidet, 30° beträgt.

Zusätzlich zu den Pyramiden wird der in der Abbildung 2 gezeigte Quader betrachtet. Die Punkte A und Q(1|1|3) sind Eckpunkte des Quaders, die Seitenflächen des Quaders sind parallel zu den Koordinatenebenen.

Für $k = 6$ enthält die Seitenfläche BCD_k der Pyramide den Eckpunkt Q des Quaders. Für kleinere Werte von k schneidet die Seitenfläche BCD_k den Quader in einem Vieleck.

e Für einen Wert von k verläuft die Seitenfläche BCD_k durch die Eckpunkte P und R des Quaders. Bestimmen Sie diesen Wert von k .

(zur Kontrolle: $k = 4$)

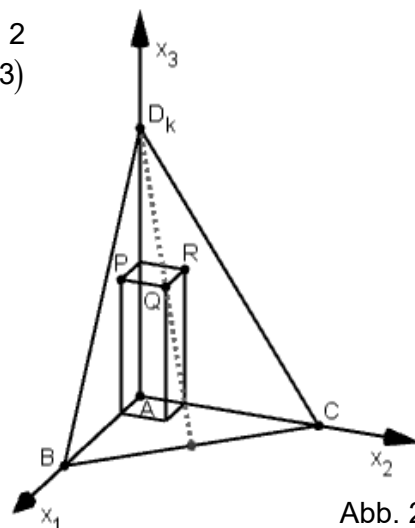


Abb. 2

f Geben Sie in Abhängigkeit von k die Anzahl der Eckpunkte des Vielecks an, in dem die Seitenfläche BCD_k den Quader schneidet.

g Nun wird die Pyramide $ABCD_6$, d. h. diejenige für $k = 6$, betrachtet. Dieser Pyramide werden Quader eingeschrieben (vgl. Abbildung 3). Die Grundflächen der Quader liegen in der x_1x_2 -Ebene, haben den Eckpunkt A gemeinsam und sind quadratisch. Die Höhe h der Quader durchläuft alle reellen Werte mit $0 < h < 6$. Für jeden Wert von h liegt der Eckpunkt Q_h in der Seitenfläche BCD_6 der Pyramide.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punkts Q_h .

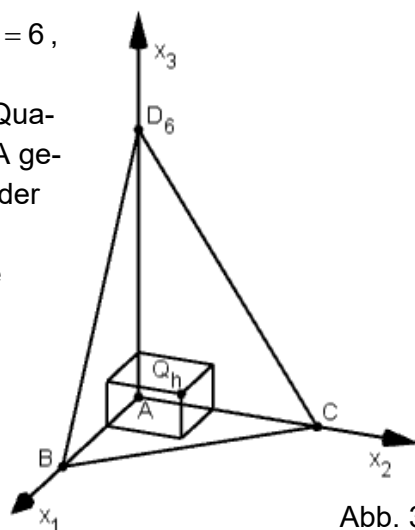


Abb. 3

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a Die Dreiecke ABD_k und ACD_k sind rechtwinklig und stimmen in den Längen ihrer Katheten überein. Damit sind auch die beiden Hypotenusen gleich lang.	2
b Da das Dreieck BCD_k gleichschenkelig mit der Basis $\overline{BC}$ ist, stellt $\overline{MD_k}$ eine Höhe dieses Dreiecks dar. Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{MD_k} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} \cdot \sqrt{8+k^2}$	3
c Da der Koordinatenursprung nicht in L_k liegt, lässt sich die gesuchte Gleichung in der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = 4$ schreiben. Mit den Koordinaten von B, C und D_k ergibt sich $a = 1$, $b = 1$ und $ck = 4 \Leftrightarrow c = \frac{4}{k}$.	4
d Für $k > 0$ gilt: $\sin 30^\circ = \frac{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{k} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{4}{k} \end{vmatrix}} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{4}{k}}{\sqrt{1+1+\frac{16}{k^2}}} \Leftrightarrow 2 = \frac{16}{k^2} = \frac{64}{k^2} \Leftrightarrow k^2 = 24 \Leftrightarrow k = 2\sqrt{6}$	5
e Enthält L_k den Punkt $P(1 0 3)$, so gilt $1 + \frac{12}{k} = 4 \Leftrightarrow k = 4$. Etwas ausführlicher: Wenn die Punkte P und R auf der Ebene liegen gehen die Kanten (D_kB und D_kC) genau durch die Punkte P und R. Am besten, man stellt eine Gleichung durch die Punkt D_k und B auf: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ Man möchte, dass g durch P geht ... also Punktprobe mit P: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}$ Aus der ersten Zeile erhält man $1 = 4 - 4r$ und daraus $r = 0,75$ Dieses r eingesetzt in die dritte Zeile und man erhält: $3 = 0,75 \cdot k$ Wenn man das nach k auflöst erhält man $k = 4$	3
f $4 \leq k < 6$: drei Eckpunkte $3 < k < 4$: fünf Eckpunkte $0 < k \leq 3$: vier Eckpunkte Hier braucht man etwas Vorstellungskraft ;-) Vielleicht hilft diese Animation weiter: https://www.geogebra.org/3d/yjtc447	
g Q_h ist derjenige Punkt der Strecke $\overline{MD_6}$, der die x_3 -Koordinate h hat. Die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ dieser Strecke liefert für $\lambda = \frac{h}{6}$: $x_1 = x_2 = 2 - \frac{h}{3}$	4
	25