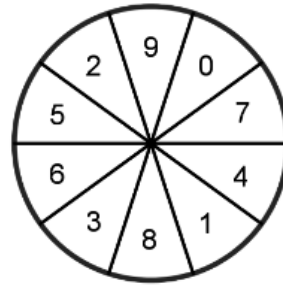


ABI 2023_M_erhoeht_B_Stochastik_WTR_1-1

Die Sektoren des abgebildeten Glücksrads sind gleich groß und mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert.



- 1** Das Glücksrad wird zwanzigmal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B.

A: „Es wird genau siebenmal eine ungerade Zahl erzielt.“

B: „Es wird mehr als siebenmal und höchstens zwölfmal eine ungerade Zahl erzielt.“

- 2** Das Glücksrad wird zweimal gedreht. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse C und D stochastisch unabhängig sind.

C: „Die Summe der erzielten Zahlen ist kleiner als 4.“

D: „Das Produkt der erzielten Zahlen ist 2 oder 3.“

- 3** Mit dem Glücksrad wird ein Spiel durchgeführt. Jeder Spieler darf das Glücksrad beliebig oft drehen. Beendet er das Spiel selbst, bevor er eine „0“ erzielt, so wird ihm die Summe der erzielten Zahlen in Euro ausgezahlt. Erzielt er eine „0“, so ist das Spiel dadurch beendet und es erfolgt keine Auszahlung.

a Ein erster Spieler entscheidet sich vor dem Spiel dafür, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, viermal zu drehen und danach das Spiel zu beenden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er eine Auszahlung erhält.

b Bei einem zweiten Spieler beträgt nach mehrmaligem Drehen des Glücksrads die Summe der erzielten Zahlen 60. Er möchte nun das Spiel entweder sofort beenden oder das Glücksrad genau ein weiteres Mal drehen. Berechnen Sie für den Fall, dass sich der Spieler für die weitere Drehung entscheiden sollte, den Erwartungswert für die Auszahlung. Geben Sie eine Empfehlung ab, ob sich der Spieler für das Beenden des Spiels oder für die weitere Drehung entscheiden sollte, und begründen Sie Ihre Empfehlung.

c Wenn sich ein Spieler vor dem Spiel dafür entscheidet, das Glücksrad, sofern er keine „0“ erzielt, n -mal zu drehen, dann kann der Erwartungswert für die Auszahlung mit dem Term $5n \cdot 0,9^n$ berechnet werden. Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Es gibt zwei, aber nicht drei aufeinanderfolgende Werte von n , für die die Erwartungswerte für die Auszahlung übereinstimmen.

- 4** Betrachtet wird ein kleiner zehenseitiger Holzkörper, dessen Seiten mit den Zahlen von 0 bis 9 durchnummeriert sind.

a Bei 80 Würfeln wird zwölfmal die „0“ erzielt. Bestimmt man auf dieser Grundlage zur Sicherheitswahrscheinlichkeit 95 % ein Konfidenzintervall für die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einem Wurf die „0“ zu erzielen, so ergibt sich als untere Grenze dieses Intervalls näherungsweise 0,09. Begründen Sie, dass die obere Grenze des Konfidenzintervalls größer als 0,1 ist. Beschreiben Sie die Bedeutung des Konfidenzintervalls im Hinblick auf die Annahme, dass beim Werfen des Holzkörpers die „0“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % erzielt wird.

b Bestimmen Sie die kleinste Anzahl von Würfeln, für die Folgendes gilt:

Wenn man bei genau 15 % der Würfe die „0“ erzielt, dann steht dies bei einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % nicht in Einklang mit der Annahme, dass beim Werfen des Holzkörpers die „0“ mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % erzielt wird.

Lösungen

Nr 1

<i>Das muss aufgeschrieben werden</i>	<i>Das sind nur Kommentare dazu</i>
$P(A) = P(X=7) \approx 0,07$ $P(B) = P(8 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 7) \approx 0,74$	Die Ergebnisse sind binomial-verteilt, weil • Es nur das Ereignis („ungerade“) und sein Gegenereignis gibt • sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses nicht ändert, egal wie oft man das ZE durchführt bei a) wird mit $\text{BinomPDF}_{20;0,5}$, bei b) mit $\text{BinomCDF}_{20;0,5}$ gerechnet

Nr 2

<i>Das muss aufgeschrieben werden</i>	<i>Das sind nur Kommentare dazu</i>
Bei Verwendung des Ergebnisraums (0;0) ; (0;1) ; ... ; (1;0) ; ... ; (9;9) ist die Summe der erzielten Zahlen bei zehn Ergebnissen kleiner als 4. Bei zwei dieser zehn Ergebnisse, aber nur bei vier Ergebnissen von allen ist das Produkt der erzielten Zahlen 2 oder 3. Damit stimmen die Anteile der Ergebnisse mit dem Produkt 2 oder 3 unter allen Ergebnissen und unter denen mit einer Summe, die kleiner als 4 ist, nicht überein. Die beiden Ereignisse sind also stochastisch abhängig.	

Nr 3

Das muss aufgeschrieben werden	Das sind nur Kommentare dazu																																	
a) $\left(\frac{9}{10}\right)^4 \approx 0,66$																																		
b) Erwartungswert in Euro: $\frac{1}{10} \cdot (61 + 62 + 63 + 64 + 65 + 66 + 67 + 68 + 69) = 58,5$ Wegen $58,5 < 60$ sollte der Spieler das Spiel sofort beenden.	Die Zufallsvariable X beschreibt: X: „Auszahlungssumme“ Hier die Wahrscheinlichkeitsverteilung und die jeweilige Auszahlungssumme <table><tr><td>e_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>x_i</td><td>0</td><td>61</td><td>62</td><td>63</td><td>64</td><td>65</td><td>66</td><td>67</td><td>68</td><td>69</td></tr><tr><td>P(x_i)</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td><td>0,1</td></tr></table> Jetzt den Erwartungswert berechnen: E(X)= 0·0,1 + 62·0,1 + 62·0,1 + 69·0,1 = 58,5 Nach einem zusätzlichen Spiel kann man also 58,5€ erwarten, das ist weniger, als er jetzt schon hat ...	e _i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x _i	0	61	62	63	64	65	66	67	68	69	P(x _i)	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
e _i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9																								
x _i	0	61	62	63	64	65	66	67	68	69																								
P(x _i)	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1																								
c) $5n \cdot 0,9^n = 5(n+1) \cdot 0,9^{n+1} \quad :0,9^n$ $5n = 5(n+1) \cdot 0,9 \quad :5$ $n = (n+1) \cdot 0,9$ $n = 0,9n + 0,9$ $n = 9$ Die Aussage ist wahr. n=9 und n=10 sind die einzigen aufeinanderfolgenden Werte mit gleichem Erwartungswert	„Aufeinanderfolgend“ bedeutet immer so etwas wie „n+1“ Hier setzt man also einfach die Erwartungswerte zweier aufeinanderfolgender Zahlen gleich und berechnet die eine Zahl (die „9“) Man hat n und n+1 gleichgesetzt, also ist die zweite Zahl n+1 = 10.																																	

Nr 4

Das muss aufgeschrieben werden	Das sind nur Kommentare dazu
a) $\frac{12}{80} = 0,15$ Da 0,15 im Vertrauensintervall liegt und 0,15 größer ist als 0,1 muss die obere Grenze des Vertrauensintervalls ebenfalls größer als 0,1 sein. Das Konfidenzintervall gibt an welche Anzahl an Nullen an, die in 96% der Fälle erwartet werden können. Da 10% im Konfidenzintervall liegt ist diese Annahme mit der Stichprobe verträglich.	Wenn man nachrechnet, ergibt sich zwar eine andere Untergrenze des Vertrauensintervalls aber die restlichen Aussagen stimmen dennoch. Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95% bedeutet $c=1,96$. $h = \frac{12}{80}$ ist die Wahrscheinlichkeit der Stichprobe. Damit ist das Konfidenzintervall : $I = \left[h - c \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} ; h + c \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \right]$ $I = \left[\frac{12}{80} - 1,96 \sqrt{\frac{\frac{12}{80} \left(1 - \frac{12}{80}\right)}{80}} ; \frac{12}{80} + 1,96 \sqrt{\frac{\frac{12}{80} \left(1 - \frac{12}{80}\right)}{80}} \right]$ $I = \left[0,15 - 1,96 \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{80}} ; \frac{12}{80} + 1,96 \sqrt{\frac{0,15 \cdot 0,85}{80}} \right]$ $I = [0,15 - 0,0857 ; 0,15 + 0,0857]$ $I = [0,064 ; 0,236]$
b) $ 0,15 - 0,1 \leq 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{120}}$ $ 0,15 - 0,1 > 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,1(1-0,1)}{140}}$ Damit ist 140 die gesuchte Anzahl von Würfeln.	