

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	AG/LA (A2)	WTR

1 Aufgabe

Abbildung 1 zeigt die Pyramide ABCDS mit den Eckpunkten $A(-3|-3|0)$, $B(3|-3|0)$, $C(3|3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$ sowie den Punkt $O(0|0|0)$, der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche CDS der Pyramide liegt in der Ebene E.

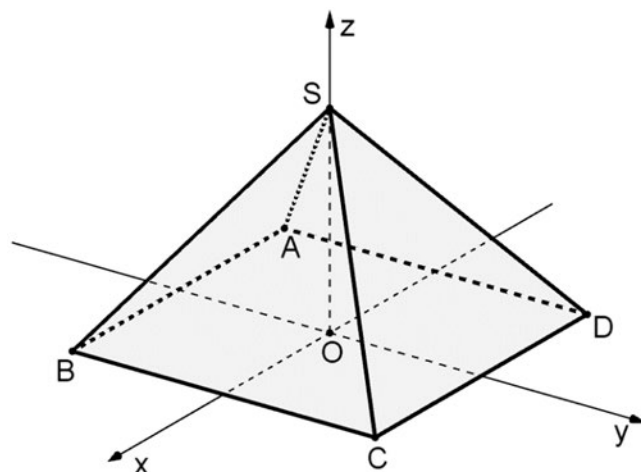


Abb. 1

- a Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.
- b Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

(1) $x - z = 0$ (2) $x + y + z = 4$ (3) $x + y = 0$

- c Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

(zur Kontrolle: $4y + 3z = 12$)

BE

4

3

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- d** Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mit Hilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

$$\text{I} \quad \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{II} \quad 4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) = 12 \quad \text{III} \quad |\overrightarrow{PQ}| = p$$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen

$$E_k: 4k \cdot x + 4\sqrt{1-k^2} \cdot y + 3 \cdot z = 12 \text{ mit } k \in [-1;1].$$

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1 .

- e** Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist. 1

- f** Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist. 4

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die xy -Ebene in einer Geraden g_k . Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In Abbildung 2 sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.

- g** Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in Abbildung 2 ein. 2

- h** Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1 , dann dreht sich die Fläche OR_kS um die Strecke $\overline{OS}$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers. 3

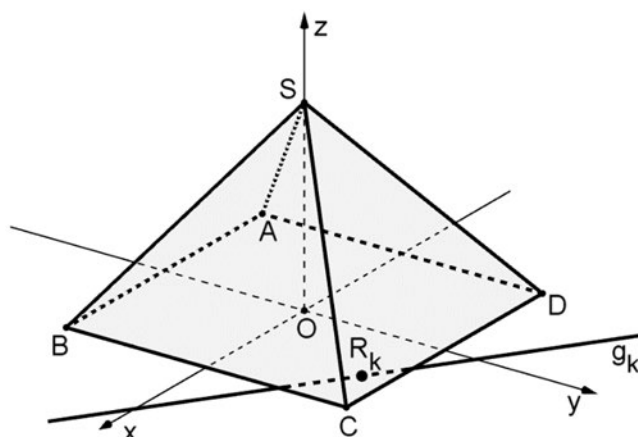
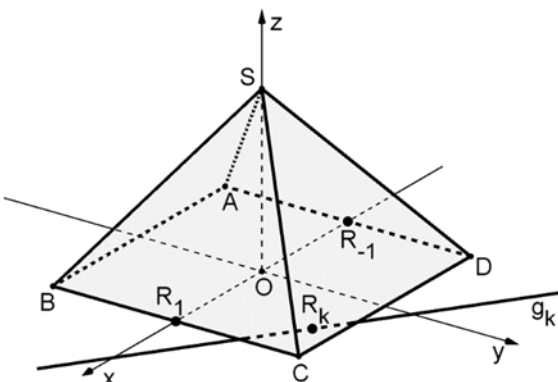


Abb. 2

25

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

	BE
a Inhalt einer Seitenfläche: $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} = 15$ Inhalt der Oberfläche der Pyramide: $6 \cdot 6 + 4 \cdot 15 = 96$	4
b (3) beschreibt eine Ebene, die Symmetrieebene der Pyramide ist. Die Koordinaten von S erfüllen Gleichung (1) nicht.	3
c $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ liefert $n_1 = 0$, $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ liefert $n_3 = \frac{3}{4}n_2$. Damit ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E. Somit hat E eine Gleichung der Form $4y + 3z = d$. Aus $C \in E$ ergibt sich $d = 12$.	3
d Q ist ein Punkt der Lotgerade zu E durch P. Q liegt außerdem in E und ist damit der Schnittpunkt der Lotgerade mit E. Der Abstand von P zu E stimmt mit dem Abstand von P zur Grundfläche überein.	5
e Wegen $4k \cdot 0 + 4\sqrt{1-k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12$ gilt $S \in E_k$.	1
f $\frac{\begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix} \right } = \frac{3}{\sqrt{16k^2 + 16 - 16k^2 + 9}} = \frac{3}{5}$ Damit ist die Größe des Winkels unabhängig von k.	4
g 	2
h Der Körper hat die Form eines senkrecht zur Grundfläche halbierten Kegels. Volumen: $\frac{1}{6} \pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 6\pi$	3
	25

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
a	4				I	I		X		
b	3	II	II		II	II			X	
c	3					II			X	
d	5	III	III		II	II	II			X
e	1	I				I		X		
f	4	II	II			II			X	
g	2		I		II		II		X	
h	3		III		III		II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.