

Pool für das Jahr 2024

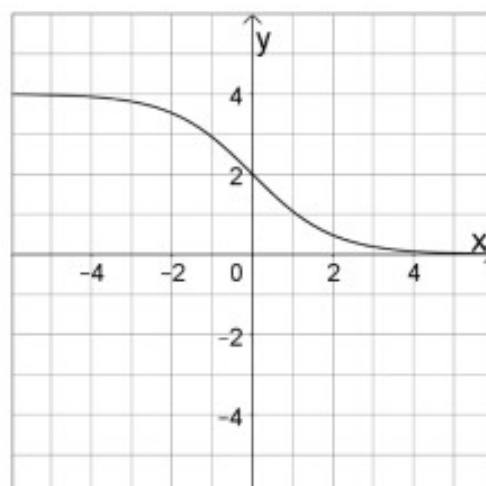
Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

- 1 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{1+e^x}$. Der Graph ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts $(0|2)$.



- a Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f , dass f keine Nullstelle hat, und geben Sie $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ sowie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ an.

- b Berechnen Sie die mittlere Steigung des Graphen von f im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ auf Hundertstel genau und bestimmen Sie grafisch die Steigung des Graphen von f in seinem Wendepunkt.

- c Für die in $\mathbb{R}$ definierte erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(-x) = f'(x)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von f' an und skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von f' .

Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F: x \mapsto 4x - 4 \cdot \ln(e^x + 1)$.

- d Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

- e Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Der Graph von F verläuft vollständig unterhalb der x -Achse.

- f Begründen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_{-k}^k f(x) dx$ für jede positive reelle Zahl k ohne Verwendung einer Stammfunktion von f exakt bestimmt werden kann, und geben Sie den Wert des Integrals an.

BE

3

5

3

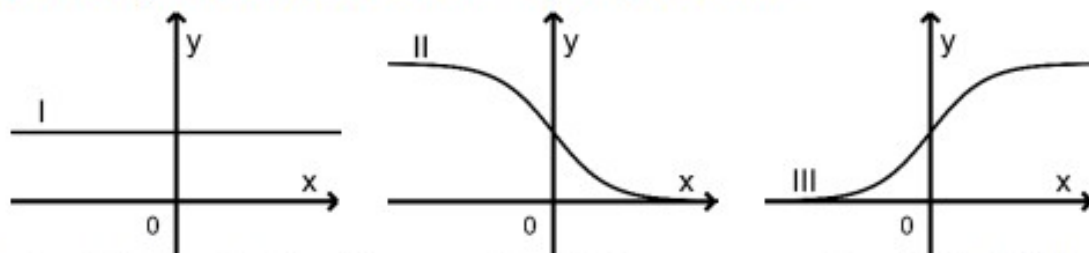
3

3

4

2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $w_{a,b,c}: x \mapsto \frac{a}{b + e^{c \cdot x}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar.

a Jeder der abgebildeten Graphen I, II und III der Schar gehört, bei festen Werten von a und b , zu einem der Werte $c = -1$, $c = 0$ und $c = 1$.



Ordnen Sie den Graphen die genannten Werte von c zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Auf einer Inselgruppe wurden Seeadler neu angesiedelt. Betrachtet wird die anschließende Entwicklung der Anzahl der Seeadler. In einem Modell wird diese Entwicklung mithilfe des Graphen der Funktion $w_{40;1;-0,2}$ beschrieben, die im Folgenden mit w bezeichnet wird. Es gilt also $w(x) = \frac{40}{1 + e^{-0,2 \cdot x}}$. Dabei ist x die seit der Ansiedlung vergangene Zeit in Jahren und $w(x)$ die Anzahl der Seeadler.

b Geben Sie auf Grundlage des Modells an, wie viele Seeadler angesiedelt wurden, und berechnen Sie, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Seeadler auf 32 angewachsen ist.

c Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(0 | w(0))$ hat die Steigung 2. Würde die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe dieser Tangente beschrieben werden, so ergäbe sich für den Zeitpunkt vier Jahre nach der Ansiedlung eine bestimmte Anzahl von Seeadlern. Untersuchen Sie, ob diese Anzahl mit derjenigen übereinstimmt, die sich bei einer Beschreibung mithilfe des Graphen von w ergeben würde.

Unter bestimmten anderen Gegebenheiten auf der Inselgruppe kann die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe des Graphen einer anderen Funktion aus der Schar der Funktionen $w_{a,b,c}$ beschrieben werden. Das folgende Gleichungssystem ermöglicht die Bestimmung der zugehörigen Werte von a , b und c .

$$(1) \quad \frac{a}{b+1} = 20$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{b + e^{c \cdot x}} = 45$$

$$(3) \quad \frac{a}{b + e^{15c}} = 35$$

d Interpretieren Sie jede der drei Gleichungen im Sachzusammenhang.

e Ermitteln Sie die Werte von a und b .

4

4

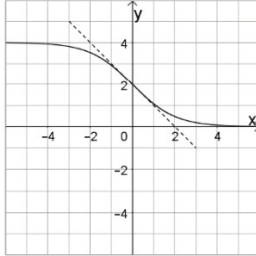
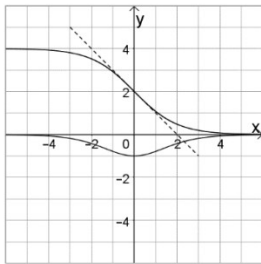
3

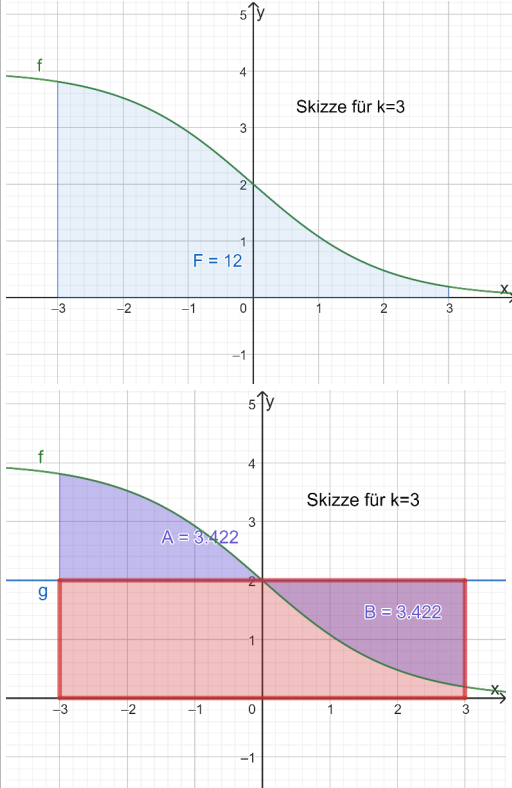
3

5

40

Lösungsvorschlag mit Kommentaren (grün ;-)

1	a f hat keine Nullstelle, da der Funktionsterm von f als Bruch mit dem Zähler 4 gegeben ist. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ b $\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)} \approx -0,92$ Steigung des Graphen im Wendepunkt: etwa -1 	Änderungsrate: • „durchschnittliche Änderun(srate)“ und „mittlere Änderung(srate)“ bedeuten, dass man den Differenzenquotient verwenden muss. Es ist immer ein „Bereich“ oder „Intervall“ angegeben. Hier z.B. [-1;1] $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ • Momentane Änderungsrate oder Steigung in einem Punkt man braucht den Wert der Ableitung an der Stelle. Entweder rechnerisch (den Wert der Ableitung an der Stelle berechnen) oder grafisch, indem man eine Tangente zeichnet und deren Steigung bestimmt „Auf ein Hundertstel“ bedeutet auf die zweite Stelle nach dem Komma.
c	Der Graph von f' ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. 	Symmetrie eines Graphen: • „symmetrisch zur y-Achse“ wenn $f(-x) = f(x)$ • „symmetrisch zum Ursprung“ wenn $f(-x) = -f(x)$ Skizzieren bedeutet, dass man die wesentlichen Merkmale wiedergeben soll. Alles, was man genau weiß (hier die Symmetrie um den Punkt (0 -1)) sollten möglichst genau eingezeichnet werden.
d	$f(x) = 4x - 4 \ln(e^x + 1)$ $f'(x) = 4 - 4 \cdot e^x \cdot \frac{1}{e^x + 1}$	$f(x) = 4x - 4 \ln(e^x + 1)$ $f'(x) = 4 - 4 \cdot e^x \cdot \frac{1}{e^x + 1}$ Die „4x“ werden abgeleitet zu „4“. Die Ableitung des Rests ist eigentlich „nur“ eine Kettenregel: $g(x) = 4 \ln(e^x + 1)$ $i(x) = e^x + 1 \quad i'(x) = e^x$

		$a(i) = 4 \ln(i) \quad a'(i) = 4 \cdot \frac{1}{i} \quad (\text{die Ableitung von } \ln(x) \text{ ist } 1/x)$ $g'(x) = i' \cdot a'$ $g'(x) = 4 \cdot e^x \cdot \frac{1}{e^x + 1}$
e	Die Aussage ist richtig, weil $4x - 4 \ln(e^x + 1) < 4x - 4 \ln(e^x)$ $< 4x - 4x$ < 0	Diese Aufgabe verlangt etwas „mathematisches Gespür“ ... Man könnte wissen, dass $\ln(e^x) = x$ ist. UND Man müsste auf die Idee kommen dass $4x - 4 \ln(e^x + 1) < 4x - 4 \ln(e^x)$ ist
f	Aufgrund der Symmetrie des Graphen von f haben die beiden Flächenstücke A und B den gleichen Inhalt. Damit stimmt der Wert des Integrals (markiert in Lila) mit dem Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $2k$ und 2 überein (rotes Rechteck). Wert des Integrals: $4k$	 Skizze für $k=3$ Skizze für $k=3$ $A = 3,422$ $B = 3,422$ $F = 12$

		Diese blaue Fläche wird mit $\int_{-k}^k f(x) dx$ berechnet So kann man sie als Rechteck darstellen
2	a $c = 0$ gehört zu I, da die Funktionswerte von $w_{a;b;0}$ konstant sind, $c = 1$ zu I $\lim_{x \rightarrow +\infty} w_{a;b;1} = 0$ gilt. Damit gehört $c = -1$ zu III. b Es wurden 20 Seeadler angesiedelt. $w(x) = 32 \Leftrightarrow 1 + e^{-0,2 \cdot x} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow e^{-0,2 \cdot x} = \frac{1}{4}$ liefert $x \approx 7$, d. h. die Anzahl der adler ist nach etwa sieben Jahren auf 32 angewachsen. c $w(4) \approx 27,6$ Bei Beschreibung der Entwicklung mithilfe der Tangente ergeben sich für der nannten Zeitpunkt $20 + 2 \cdot 4 = 28$ Seeadler und damit etwa die gleiche Anzahl d (1) Es werden 20 Seeadler angesiedelt. (2) Langfristig werden laut Modell 45 Seeadler auf der Inselgruppe leben. (3) Nach 15 Jahren leben laut Modell 35 Seeadler auf der Inselgruppe.	
e	Laut Aufgabe ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{b + e^{cx}} = 45 \frac{\square}{\square}$. Der Bruch kann für unendlich große x nur dann einen endlichen Wert (45) haben, wenn $e^{cx} \rightarrow 0$ geht. Das ist nur für $c < 0$ möglich. Es ist also $c < 0$. Damit ist für $x \rightarrow \infty$ also $\frac{a}{b} = 45$.	

Laut Aufgabe ist außerdem $\frac{a}{b+1}=20$.

Umformen ergibt $a=20(b+1)$.

Einsetzen in $\frac{a}{b}=45$ ergibt:

$$\frac{20(b+1)}{b}=45$$

$$\frac{20b}{b} + \frac{20}{b} = 45$$

$$20 + \frac{20}{b} = 45$$

$$\frac{20}{b} = 25$$

$$b = \frac{20}{25} = \frac{4}{5} \rightarrow b = \frac{4}{5}$$

$b = \frac{4}{5}$ einsetzen in $\frac{a}{b}=45$ liefert

$$\frac{a}{\frac{4}{5}} = 45$$

$$a = 45 \cdot \frac{4}{5} = 36 \rightarrow a = 36$$