

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

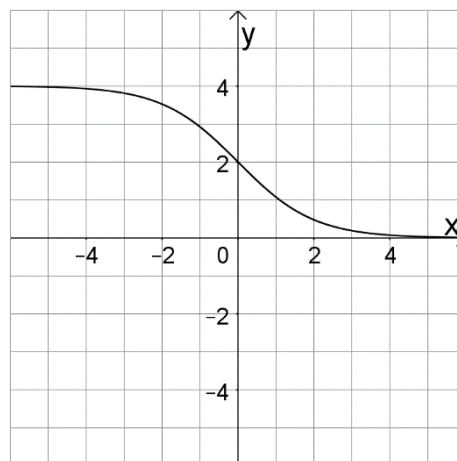
Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

- 1 Die Abbildung zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: x \mapsto \frac{4}{1+e^x}$. Der Graph ist symmetrisch bezüglich seines Wendepunkts $(0|2)$.



- a Begründen Sie anhand des Funktionsterms von f , dass f keine Nullstelle hat, und geben Sie $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ sowie $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ an.
- b Berechnen Sie die mittlere Steigung des Graphen von f im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ auf Hundertstel genau und bestimmen Sie grafisch die Steigung des Graphen von f in seinem Wendepunkt.
- c Für die in $\mathbb{R}$ definierte erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(-x) = f'(x)$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von f' an und skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen von f' .
- Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $F: x \mapsto 4x - 4 \cdot \ln(e^x + 1)$.
- d Zeigen Sie, dass die Funktion F eine Stammfunktion von f ist.

BE

3

5

3

3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- e Beurteilen Sie die folgende Aussage:

Der Graph von F verläuft vollständig unterhalb der x -Achse.

3

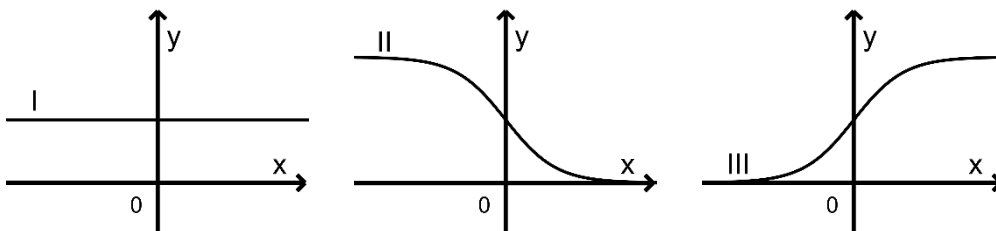
- f Begründen Sie, dass der Wert des Integrals $\int_{-k}^k f(x) dx$ für jede positive reelle Zahl k ohne Verwendung einer Stammfunktion von f exakt bestimmt werden kann, und geben Sie den Wert des Integrals an.

4

- 2 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $w_{a,b;c}: x \mapsto \frac{a}{b + e^{c \cdot x}}$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $c \in \mathbb{R}$. Die Funktion aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar.

- a Jeder der abgebildeten Graphen I, II und III der Schar gehört, bei festen Werten von a und b , zu einem der Werte $c = -1$, $c = 0$ und $c = 1$.

4



Ordnen Sie den Graphen die genannten Werte von c zu und begründen Sie Ihre Zuordnung.

Auf einer Inselgruppe wurden Seeadler neu angesiedelt. Betrachtet wird die anschließende Entwicklung der Anzahl der Seeadler. In einem Modell wird diese Entwicklung mithilfe des Graphen der Funktion $w_{40;1;-0,2}$ beschrieben, die im Folgenden mit w bezeichnet wird. Es gilt also $w(x) = \frac{40}{1 + e^{-0,2 \cdot x}}$. Dabei ist x die seit der Ansiedlung vergangene Zeit in Jahren und $w(x)$ die Anzahl der Seeadler.

- b Geben Sie auf Grundlage des Modells an, wie viele Seeadler angesiedelt wurden, und berechnen Sie, nach wie vielen Jahren die Anzahl der Seeadler auf 32 angewachsen ist.
- c Die Tangente an den Graphen von w im Punkt $(0 | w(0))$ hat die Steigung 2. Würde die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe dieser Tangente beschrieben werden, so ergäbe sich für den Zeitpunkt vier Jahre nach der Ansiedlung eine bestimmte Anzahl von Seeadlern. Untersuchen Sie, ob diese Anzahl mit derjenigen übereinstimmt, die sich bei einer Beschreibung mithilfe des Graphen von w ergeben würde.

4

3

Unter bestimmten anderen Gegebenheiten auf der Inselgruppe kann die Entwicklung der Anzahl der Seeadler im Modell mithilfe des Graphen einer anderen Funktion aus der Schar der Funktionen $w_{a,b;c}$ beschrieben werden. Das folgende Gleichungssystem ermöglicht die Bestimmung der zugehörigen Werte von a , b und c .

$$(1) \quad \frac{a}{b+1} = 20$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a}{b + e^{c \cdot x}} = 45$$

$$(3) \quad \frac{a}{b + e^{15c}} = 35$$

- d Interpretieren Sie jede der drei Gleichungen im Sachzusammenhang.
- e Ermitteln Sie die Werte von a und b .

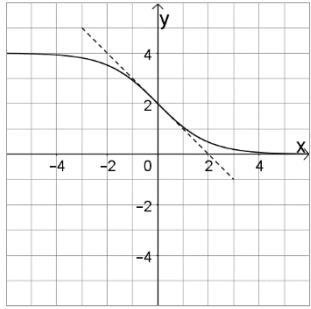
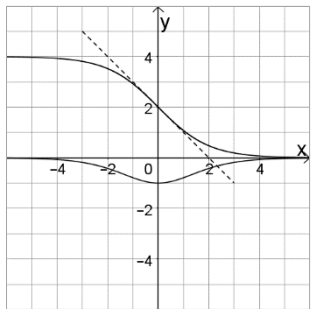
3

5

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a f hat keine Nullstelle, da der Funktionsterm von f als Bruch mit dem Zähler 4 gegeben ist. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$	3
	b $\frac{f(1) - f(-1)}{1 - (-1)} \approx -0,92$ Steigung des Graphen im Wendepunkt: etwa -1 	5
	c Der Graph von f' ist symmetrisch bezüglich der y-Achse. 	3
	d $F'(x) = 4 - \frac{4}{e^x + 1} \cdot e^x = \frac{4(e^x + 1) - 4e^x}{e^x + 1} = \frac{4}{e^x + 1}$	3
	e Die Aussage ist richtig, da $4x - 4 \cdot \ln(e^x + 1) < 4x - 4 \cdot \ln e^x = 0$ gilt.	3
	f Aufgrund der Symmetrie des Graphen von f haben die beiden Flächenstücke, die der Graph von f und die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ für $-k \leq x \leq 0$ bzw. für $0 \leq x \leq k$ einschließen, den gleichen Inhalt. Damit stimmt der Wert des Integrals mit dem Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seitenlängen $2k$ und 2 überein. Wert des Integrals: $4k$	4
2	a $c = 0$ gehört zu I, da die Funktionswerte von $w_{a;b;0}$ konstant sind, $c = 1$ zu II, da $\lim_{x \rightarrow +\infty} w_{a;b;1} = 0$ gilt. Damit gehört $c = -1$ zu III.	4
	b Es wurden 20 Seeadler angesiedelt. $w(x) = 32 \Leftrightarrow 1 + e^{-0,2 \cdot x} = \frac{5}{4} \Leftrightarrow e^{-0,2 \cdot x} = \frac{1}{4}$ liefert $x \approx 7$, d. h. die Anzahl der Seeadler ist nach etwa sieben Jahren auf 32 angewachsen.	4
	c $w(4) \approx 27,6$ Bei Beschreibung der Entwicklung mithilfe der Tangente ergeben sich für den genannten Zeitpunkt $20 + 2 \cdot 4 = 28$ Seeadler und damit etwa die gleiche Anzahl.	3

d	(1) Es werden 20 Seeadler angesiedelt. (2) Langfristig werden laut Modell 45 Seeadler auf der Inselgruppe leben. (3) Nach 15 Jahren leben laut Modell 35 Seeadler auf der Inselgruppe.	3
e	Aus (2) und (1) folgt $c < 0$ und damit $\frac{a}{b} = 45$. In Verbindung mit (1) ergibt sich daraus $45b = 20b + 20$, d. h. $b = \frac{4}{5}$, und $a = 36$.	5
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3	I				I	I	x		
b	5				I	I		x		
c	3		II		II		II		x	
d	3		I			II			x	
e	3	III	III			II				x
f	4	III	III		II	I	II			x
2 a	4	II	I		II		I		x	
b	4			I		II	I		x	
c	3			II		I	I		x	
d	3			II	II		II		x	
e	5	II	III		II	II				x

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.