

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

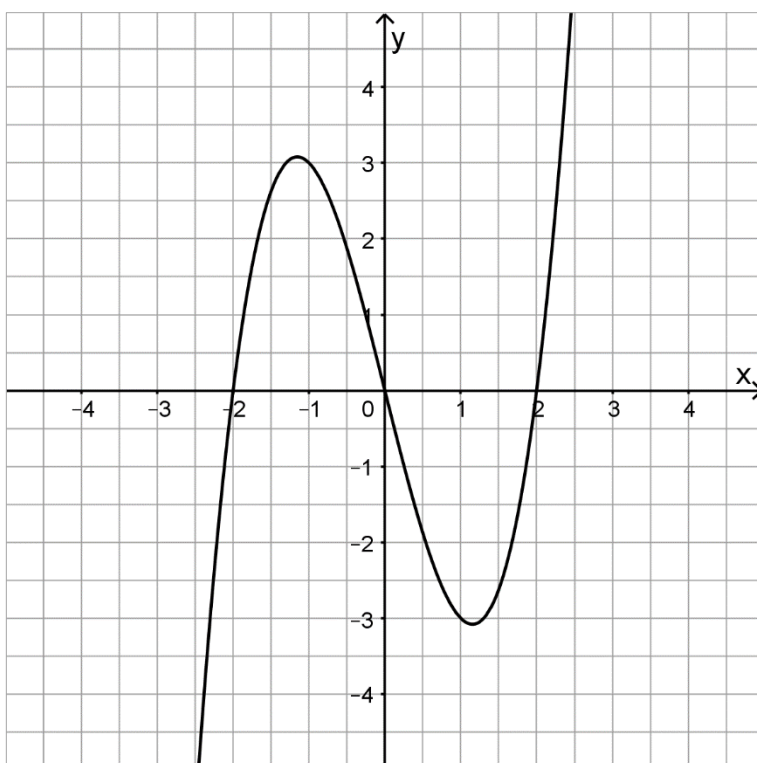
Aufgaben für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

- 1 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a,b} : x \mapsto ax^3 - bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Die Abbildung zeigt den Graphen einer der Funktionen der Schar.



BE

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

a Begründen Sie, dass jeder Graph der Schar symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist. 2

b Weisen Sie in Abhängigkeit von a und b nach, dass der Graph von $f_{a,b}$ einen Tiefpunkt mit der x -Koordinate $\sqrt{\frac{b}{3a}}$ hat. Begründen Sie, dass er zudem einen Hochpunkt besitzt und dass dieser eine kleinere x -Koordinate hat als der Tiefpunkt. 6

c Es gibt eine Funktion der Schar, die bei $x = 3$ eine Nullstelle hat und deren Graph im vierten Quadranten mit der x -Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 40,5 einschließt. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von a und b . 7

Die Funktion der Schar, deren Graph in der Abbildung dargestellt ist, wird mit f bezeichnet; ihr Funktionsterm ist $f(x) = x^3 - 4x$.

d Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $A(2|0)$, die x -Achse und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x - 2$ schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt. 7

e Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist: 4

Ist P ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f , so liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P und dem Koordinatenursprung auf dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $h : x \mapsto 4x^3 - 4x$.

2 Die Leitung eines großen Unternehmens versendet jeden Arbeitstag um 7:00 Uhr eine E-Mail mit tagesaktuellen Informationen an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Diese wurden gebeten, nach dem Lesen der E-Mail eine Lesebestätigung zu versenden.

Die folgende Tabelle zeigt für einen bestimmten Tag, wie viele Lesebestätigungen bei der Leitung des Unternehmens bis zum jeweiligen Zeitpunkt bereits eingegangen sind.

Zeitpunkt	7:30 Uhr	8:00 Uhr	8:30 Uhr	9:00 Uhr	9:30 Uhr	10:00 Uhr		14:30 Uhr	15:00 Uhr	
Anzahl der bis dahin eingegangenen Lesebestätigungen	252	899	1701	2627	3503	4364		7552	7572	

Beispielsweise sind von 7:00 Uhr bis 10:00 Uhr 4364 Lesebestätigungen eingegangen.

a Ermitteln Sie mithilfe der Tabelle für den betrachteten Tag, wie viele Lesebestätigungen im Zeitraum von 8:30 Uhr bis 10:00 Uhr im Mittel pro Stunde eingegangen sind. 3

Auf der Grundlage der über viele Tage erfassten Lesebestätigungen wurde mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $u : x \mapsto 100x^3 - 900x^2 + 2300x$ und $v : x \mapsto 20x^2 - 520x + 2880$ die Funktion k entwickelt:

$$k : x \mapsto \begin{cases} u(x) & \text{für } 0 \leq x < 3 \\ v(x) & \text{für } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Die Funktion k beschreibt modellhaft für einen Zeitraum von acht Stunden eines Arbeitstages die zeitliche Entwicklung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der

eingegangenen Lesebestätigungen. Dabei ist x die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen in der Einheit $\frac{1}{h}$.

b Berechnen Sie $k(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

c Es gilt $v(x) = 20 \cdot (x - 18) \cdot (x - 8)$. Begründen Sie, dass die Funktion v nicht geeignet ist, die momentane Änderungsrate auch für den Zeitraum nach 15:00 Uhr zu beschreiben.

d Berechnen Sie mithilfe der Funktion k die Anzahl der im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr eines Arbeitstages eingegangenen Lesebestätigungen. Ermitteln Sie, um wie viel Prozent diese auf der Grundlage des Modells berechnete Anzahl von der entsprechenden Anzahl des eingangs betrachteten Tages (vgl. Tabelle) abweicht.

40

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a Der gegebene Term von $f_{a,b}$ ist ein Polynom mit ausschließlich ungeraden Exponenten von x.	2
	b $f'_{a,b}(x) = 3ax^2 - b$; $f'_{a,b}\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = 3a \cdot \frac{b}{3a} - b = 0$ $f''_{a,b}(x) = 6ax$; $f''_{a,b}\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = 6a \cdot \sqrt{\frac{b}{3a}} > 0$ Aufgrund der Punktsymmetrie hat der Graph von $f_{a,b}$ an der Stelle $-\sqrt{\frac{b}{3a}}$ einen Hochpunkt; dessen x-Koordinate ist damit kleiner als die des Tiefpunkts.	6
	c Es gilt: I $f_{a,b}(3) = 0$ II $\int_0^3 f_{a,b}(x) dx = -40,5$ Aus I ergibt sich: $27a - 3b = 0 \Leftrightarrow b = 9a$ In II: $\int_0^3 (ax^3 - 9ax) dx = -40,5 \Leftrightarrow a \cdot \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2\right]_0^3 = -40,5 \Leftrightarrow -\frac{81}{4}a = -40,5 \Leftrightarrow a = 2$ In I: $b = 18$	7
	d $f'(x) = 3x^2 - 4$; $f'(2) = 8$ $0 = 8 \cdot 2 + n \Leftrightarrow n = -16$ Gleichung der Tangente: $y = 8x - 16$	7

	Schnittpunkt von Tangente und Gerade g: $8x - 16 = -x - 2 \Leftrightarrow x = \frac{14}{9}; y = -\frac{14}{9} - 2 = -\frac{32}{9}$ Flächeninhalt: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{32}{9} = \frac{64}{9}$	
e	Bezeichnet x die x-Koordinate eines beliebigen Punkts P auf dem Graphen von f, so ist nachzuweisen, dass der Punkt $\left(\frac{x}{2} \mid \frac{f(x)}{2}\right)$ auf dem Graphen von h liegt: $h\left(\frac{x}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3 - 4 \cdot \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(x^3 - 4x) = \frac{1}{2}f(x)$	4
2 a	$\frac{4364 - 1701}{1,5} \approx 1775$	3
b	$k(2) = 1800$, d. h. um 9:00 Uhr beträgt die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen laut Modell $1800 \frac{1}{h}$.	3
c	Da $v(x)$ an der Stelle 8 sein Vorzeichen von plus nach minus ändert, würden sich unmittelbar nach 15:00 Uhr negative Änderungsraten ergeben, was in diesem Sachzusammenhang unmöglich ist.	3
d	Anzahl der Lesebestätigungen: $\int_3^8 k(x) dx = \left[\frac{20}{3}x^3 - 260x^2 + 2880x \right]_3^8 \approx 3333$ $\frac{3333 - (7572 - 4364)}{7572 - 4364} \approx 3,9\%$	5
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2		I			I		X		
b	6	I				II			X	
c	7	II	III		II	II				X
d	7		II		I	II			X	
e	4	III	III		III	II	II			X
2 a	3		I	I	I			X		
b	3	I				I	I	X		
c	3	II		II			II		X	
d	5	I	II	II		II	I		X	

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.