

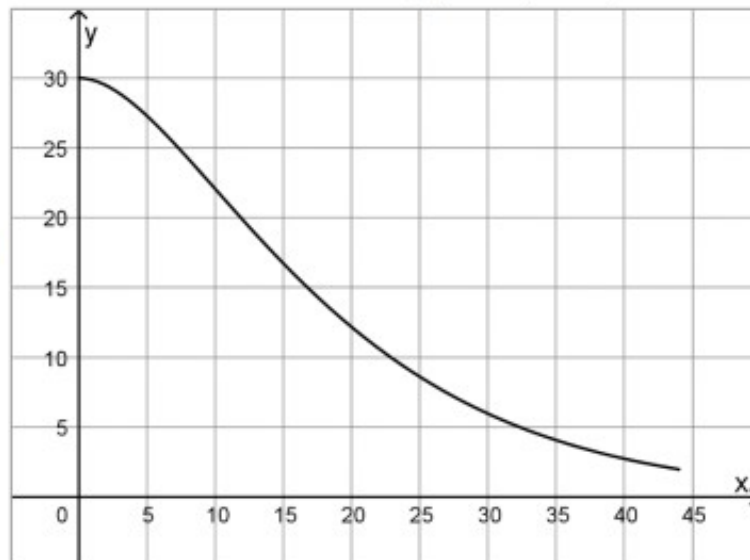
Pool für 2024

1 Aufgabe

BE

- 1 Der abgebildete Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot (x + 10) \cdot e^{-0,1x}$ stellt für $0 \leq x \leq 44$ den

Längsschnitt einer Rutschbahn dar. Der Anfang der Rutschbahn wird im Modell durch den Punkt $(0 | f(0))$ beschrieben, ihr Ende durch den Punkt $(44 | f(44))$. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x -Achse den horizontalen Erdboden. Eine Längeneinheit entspricht 10 cm in der Wirklichkeit.



Für die erste und die zweite Ableitungsfunktion von f gilt: $f'(x) = -0,3x \cdot e^{-0,1x}$ bzw. $f''(x) = 0,03 \cdot (x - 10) \cdot e^{-0,1x}$

- a Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen dem Anfang und dem Ende der Rutschbahn.

3

In einer Zusammenstellung der Sicherheitskriterien für Rutschbahnen auf öffentlichen Spielplätzen einer Gemeinde heißt es:

- I Der durch den Anfangspunkt und den Endpunkt der Rutschbahn festgelegte Winkel gegenüber der Horizontalen darf eine Größe von 45° nicht überschreiten.
- II Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen mit einer Größe über 60° sind an keinem Punkt der gesamten Rutschbahn zulässig.

- b Beurteilen Sie ohne weitere Rechnung, ob die betrachtete Rutschbahn das Sicherheitskriterium I erfüllt. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen hierzu in der Abbildung.

3

- c Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Rutschbahn das Sicherheitskriterium II erfüllt.

4

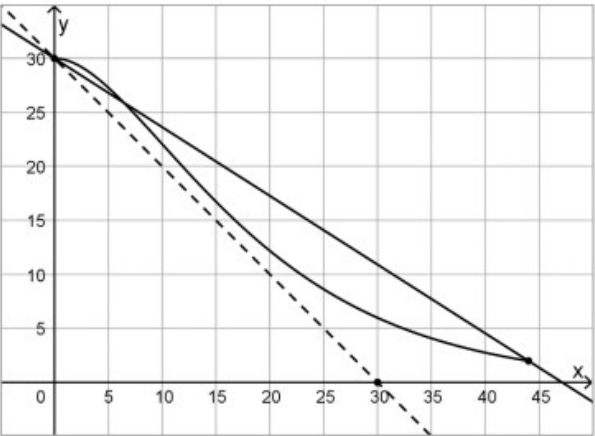
- d Die Rutschbahn wird durch eine Strebe gestützt. Die Strebe kann im Modell durch eine Strecke beschrieben werden, die vom Punkt $P(40 | f(40))$ senkrecht zur Tangente an den Graphen von f im Punkt P verläuft. Berechnen Sie die Länge der Strebe zwischen der Rutschbahn und dem Erdboden.

6

- 2** Die Funktion f aus Aufgabe 1 gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $f_k(x) = k \cdot (x + 10) \cdot e^{-0,1x}$ und $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.
- a** Begründen Sie, dass -10 die einzige Nullstelle von f_k ist, und geben Sie das Verhalten von f_k für $x \rightarrow -\infty$ in Abhängigkeit von k an. 3
- b** Für jeden Wert von k besitzt G_k genau einen Extrempunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunkts von G_k in Abhängigkeit von k . 5
- c** Für $k \neq -1$ werden G_k und G_{k+1} betrachtet. Berechnen Sie den Abstand der Schnittpunkte von G_k und G_{k+1} mit der y -Achse. 2
- d** Beurteilen Sie die folgende Aussage: 3
- Spiegelt man einen beliebigen Graphen der Schar an der x -Achse, so entsteht ein anderer Graph der Schar.*
- Im Folgenden sei $k > 0$.
- e** Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_k mit $F_k(x) = -10k \cdot (x + 20) \cdot e^{-0,1x}$ ist eine Stammfunktion von f_k . 5
- G_k schließt im zweiten Quadranten mit den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein. Diese Fläche wird durch eine Gerade h_k in zwei Flächenstücke gleichen Inhalts geteilt, wobei die Gerade h_k für $x < 0$ den Graphen G_k nur auf der x -Achse schneidet. Ermitteln Sie eine Gleichung von h_k .
- f** Betrachtet werden reelle Werte von u , die größer als -10 sind. Ausgehend von den Punkten $(-10 | 0)$ und $(u | 0)$ stellen die folgenden vier Schritte die Lösung einer Aufgabenstellung in einem geometrischen Zusammenhang dar: 6
- (1) $p_k(u) = \frac{1}{2} \cdot (u + 10) \cdot f_k(u)$
 - (2) $p'_k(u) = 0 \Leftrightarrow u = 10$
 - (3) Es gilt: $p''_k(10) < 0$
 - (4) Ergebnis: $p_k(10) \approx 73,6 \cdot k$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an und erläutern Sie die Schritte.

Lösungsvorschlag mit Kommentaren (grün ;-)

1 a	$f(0) - f(44) \approx 28,0$ Der Höhenunterschied beträgt etwa 280 cm. b Die Gerade durch $(0 30)$ und $(30 0)$ schließt mit der x-Achse einen Winkel der Größe 45° ein und verläuft steiler als die eingezeichnete Sekante. Das Sicherheitskriterium I ist erfüllt. 	
c	$f'(x) = 0$ $0,03(x-10)e^{-0,1x} = 0$ $x=10$ Steigungswinkel : $\tan(\alpha) = m$ $\alpha = \tan^{-1}(m)$ $m = f'(10)$ $m = f'(10) = -0,3 \cdot (10) \cdot e^{-0,1 \cdot (10)} = -3 \cdot e^{-1} \approx -1,1036$ $\rightarrow \alpha = \tan^{-1}(-1,1036) \approx -47,817^\circ$	Wendepunkte sind die Punkte größter / kleinster Steigung, Merken kann man sich das so: f N E W f' N E W f'' N E W Die Nullstelle der zweiten Ableitung ist ein Extremum der ersten Ableitung. Die Steigung m einer Gerade (z.B der Tangente) kann in einen Steigungswinkel umgerechnet werden über $\tan(\alpha) = m$

d Normale in P: $n: y = m_n x + c$

Steigung:

$$m_n = -\frac{1}{f'(40)} = \frac{e^4}{12} \quad m_n \approx 4,550$$

c bestimmen:

$$P(40 | f(40)) \rightarrow P(40 | 150e^{-4}) \approx P(40 | 2,747)$$

$$150e^{-4} = \frac{e^4}{12} \cdot 40 + c$$

$$150e^{-4} - 40 \cdot \frac{e^4}{12} = c \quad c \approx 179,246$$

$$n: y = \frac{e^4}{13} \cdot x + 150e^{-4} - 40 \cdot \frac{e^4}{12} \quad n(x) = 4,55x + 179,246$$

Nullstelle der Normale:

$$n(x) = 0$$

$$\frac{e^4}{13} \cdot x + 150e^{-4} - 40 \cdot \frac{e^4}{12} = 0$$

$$\frac{e^4}{13} \cdot x = -150e^{-4} + 40 \cdot \frac{e^4}{12}$$

$$x = -\frac{13}{e^4} 150e^{-4} + 40 \cdot \frac{13}{e^4} \cdot \frac{e^4}{12}$$

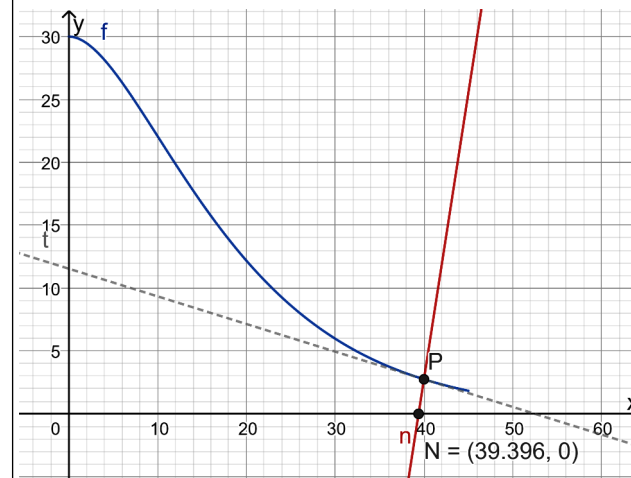
$$x_1 = -\frac{1950}{e^8} + \frac{520}{12} \quad x_1 \approx 39,396$$

Länge:

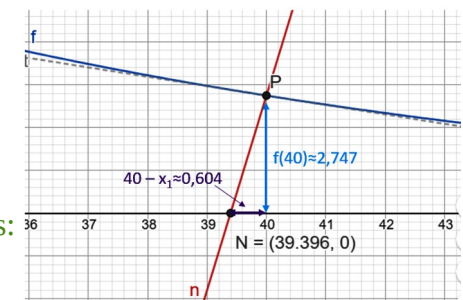
$$l = \sqrt{f(40)^2 + (40 - x_1)^2} \approx \sqrt{(2,747)^2 + 0,604^2} \approx 2,813$$

Die Länge beträgt 28,13 cm

Zuerst eine Skizze, damit klar ist, was man tun muss.



Bei einer Anwendungsaufgabe - vor allem, wenn es so unfassbar hässliche Zahlen sind- kann man mit Kommazahlen (in blau ;-) rechnen.



Berechnen der Länge über Pythagoras:

In der Aufgabe stand eine Längeneinheit sind 10cm.

2	a Wegen $k \cdot e^{-0,1x} \neq 0$ ist -10 die einzige Lösung von $f_k(x) = 0$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = -\infty \text{ für } k > 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = +\infty \text{ für } k < 0$ b $f'_k(x) = k \cdot (e^{-0,1x} - 0,1 \cdot (x+10) \cdot e^{-0,1x}) = -0,1 \cdot k \cdot x \cdot e^{-0,1x}$ $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f_k(0) = 10k$ Der Extrempunkt von G_k ist $(0 10k)$. Unter Berücksichtigung der Nullstelle -10 folgt, dass für positive Werte von k ein Hoch-, für negative Werte von k ein Tiefpunkt vorliegt.	
c	$f_k(x) = k \cdot (x+10) e^{-0,1x}$ Schnittpunkte auf der y-Achse: $y_k = f_k(0) = k \cdot (0+10) e^{-0,1 \cdot 0} = 10k$ $y_{k+1} = f_k(0) = (k+1) \cdot (0+10) e^{-0,1 \cdot 0} = 10k+10$ Abstand $d = y_{k+1} - y_k = 10$	„Auf der y-Achse“ bedeutet $x=0$
d	$-f_k(x) = -k \cdot (x+10) \cdot e^{-0,1x} = f_{-k}(x)$ Die Aussage ist wahr.	Spiegelt man etwas an der x-Achse ändert sich bei allen y-Werten das Vorzeichen. Rechnerisch muss man also die Funktionsgleichung mit „-1“ multiplizieren ... aus $f_k(x)$ wird $-f_k(x)$. Dann muss man nur prüfen, ob die Aussage („... wieder eine Kurve der Schar.“) wahr ist.

e

Nullstelle

$$f_k(x) = 0$$

$$k(x+10) \cdot e^{-0,1x} = 0$$

$$x_N = -10$$

Fläche zwischen Koordinatenachsen und G_k :

$$\begin{aligned} A &= \int_{-10}^0 f_k(x) dx = \left[-10k(x+20)e^{-0,1x} \right]_{-10}^0 \\ &= \left(-10k((0)+20)e^{-0,1(0)} \right) - \left(-10k((-10)+20)e^{-0,1(-10)} \right) \\ &= \left(-200k \cdot 1 \right) - \left(-100k \cdot e^1 \right) \\ &= -200k + 100 \cdot k \cdot e \end{aligned}$$

Fläche zwischen Koordinatenachsen und Gerade g ist ein Dreieck mit der Höhe c :

$$A_\Delta = \frac{1}{2}(-10) \cdot c$$

Die Dreiecksfläche soll halb so groß sein, wie die Gesamtfläche

$$A_\Delta = \frac{1}{2} A$$

$$\frac{1}{2}(-10) \cdot c = \frac{1}{2}(-200k + 100 \cdot k \cdot e)$$

$$c = (20k - 10 \cdot k \cdot e)$$

Geradengleichung

$$y = mx + c$$

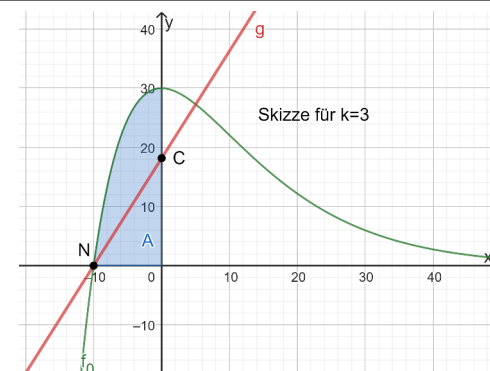
...weiter auf der nächsten Seite

Skizze machen !!!

Die Fläche A berechnet sich über das Integral.

Untere Grenze ist die Nullstelle

$$x_N = -10$$

Obere Grenze ist $x=0$ Die Stammfunktion ist in der Aufgabe schon gegeben $F(x) = \dots$ 

Die Gerade soll die Fläche halbieren und muss durch den Nullpunkt N gehen (laut Aufgabe). Die Flächenstücke sind gleich groß, dann nehmen wir doch das untere, das ist ein Dreieck ;-)

	Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{20k - 10 \cdot k \cdot e}{-10} = -2k + k \cdot e$ c ist schon bestimmt. → h: $y = \underbrace{(-2k + k \cdot e)}_m \cdot x \underbrace{- 20k + 10 \cdot k \cdot e}_c$	
f	Aufgabenstellung: Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k den größten Flächeninhalt eines Dreiecks, das die Eckpunkte $(-10 0)$, $(u 0)$ und $(u f_k(u))$ besitzt. Erläuterung: p_k gibt den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks an: Länge der Grundseite $u + 10$ und Höhe $f_k(u)$. In den Schritten (2) und (3) wird der Wert von u bestimmt, für den p_k als einziges Extremum ein Maximum annimmt. Dieses Maximum beträgt etwa $73,6 \cdot k$.	Ohne Worte