

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Pool für das Jahr 2024

Aufgaben für das Fach Mathematik

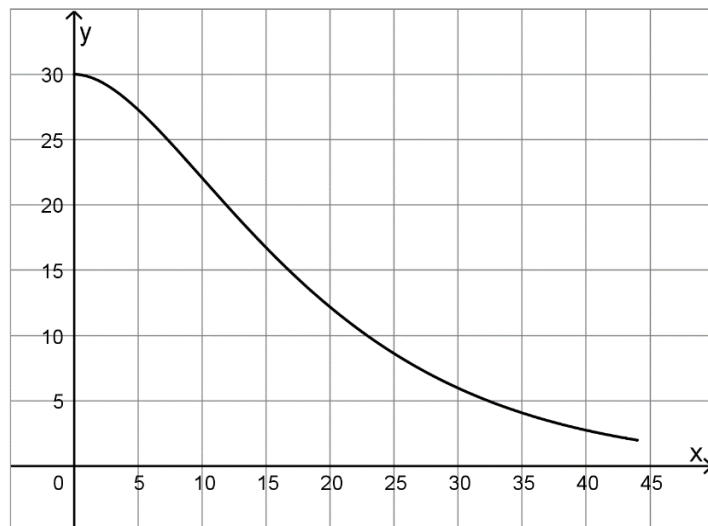
Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet ¹	digitales Hilfsmittel
erhöht	B	Analysis	WTR

1 Aufgabe

1 Der abgebildete Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot (x + 10) \cdot e^{-0,1x}$ stellt für $0 \leq x \leq 44$ den

Längsschnitt einer Rutschbahn dar. Der Anfang der Rutschbahn wird im Modell durch den Punkt $(0 | f(0))$ beschrieben, ihr Ende durch den Punkt $(44 | f(44))$. Im verwendeten Koordinatensystem beschreibt die x -Achse den horizontalen Erdboden. Eine Längeneinheit entspricht 10 cm in der Wirklichkeit.



Für die erste und die zweite

Ableitungsfunktion von f gilt: $f'(x) = -0,3x \cdot e^{-0,1x}$ bzw. $f''(x) = 0,03 \cdot (x - 10) \cdot e^{-0,1x}$

a Berechnen Sie den Höhenunterschied zwischen dem Anfang und dem Ende der Rutschbahn.

In einer Zusammenstellung der Sicherheitskriterien für Rutschbahnen auf öffentlichen Spielplätzen einer Gemeinde heißt es:

BE

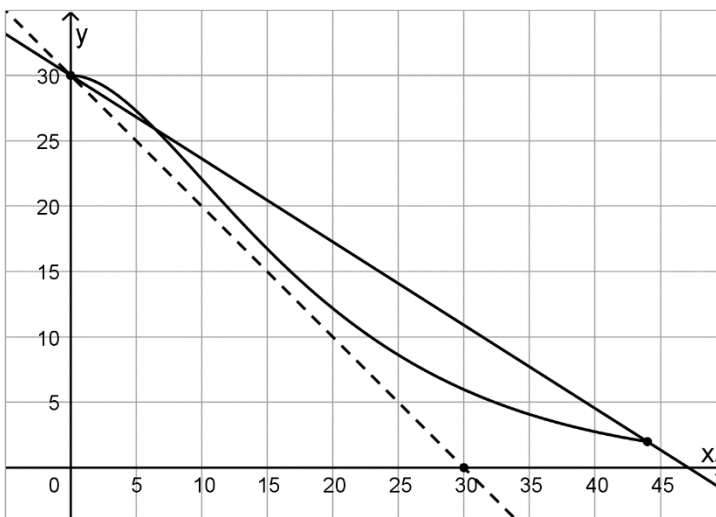
3

¹ verwendete Abkürzungen: AG/LA - Analytische Geometrie/Lineare Algebra, AG/LA (A1) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A1), AG/LA (A2) - Analytische Geometrie/Lineare Algebra (Alternative A2)

- I Der durch den Anfangspunkt und den Endpunkt der Rutschbahn festgelegte Winkel gegenüber der Horizontalen darf eine Größe von 45° nicht überschreiten.
- II Neigungswinkel gegenüber der Horizontalen mit einer Größe über 60° sind an keinem Punkt der gesamten Rutschbahn zulässig.
- b Beurteilen Sie ohne weitere Rechnung, ob die betrachtete Rutschbahn das Sicherheitskriterium I erfüllt. Veranschaulichen Sie Ihre Überlegungen hierzu in der Abbildung. 3
- c Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Rutschbahn das Sicherheitskriterium II erfüllt. 4
- d Die Rutschbahn wird durch eine Strebe gestützt. Die Strebe kann im Modell durch eine Strecke beschrieben werden, die vom Punkt $P(40 | f(40))$ senkrecht zur Tangente an den Graphen von f im Punkt P verläuft. Berechnen Sie die Länge der Strebe zwischen der Rutschbahn und dem Erdboden. 6
- 2 Die Funktion f aus Aufgabe 1 gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k mit $f_k(x) = k \cdot (x + 10) \cdot e^{-0,1x}$ und $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.
- a Begründen Sie, dass -10 die einzige Nullstelle von f_k ist, und geben Sie das Verhalten von f_k für $x \rightarrow -\infty$ in Abhängigkeit von k an. 3
- b Für jeden Wert von k besitzt G_k genau einen Extrempunkt. Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunkts von G_k in Abhängigkeit von k . 5
- c Für $k \neq -1$ werden G_k und G_{k+1} betrachtet. Berechnen Sie den Abstand der Schnittpunkte von G_k und G_{k+1} mit der y -Achse. 2
- d Beurteilen Sie die folgende Aussage: 3
- Spiegelt man einen beliebigen Graphen der Schar an der x -Achse, so entsteht ein anderer Graph der Schar.*
- Im Folgenden sei $k > 0$.
- e Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion F_k mit $F_k(x) = -10k \cdot (x + 20) \cdot e^{-0,1x}$ ist eine Stammfunktion von f_k . 5
- G_k schließt im zweiten Quadranten mit den beiden Koordinatenachsen eine Fläche ein. Diese Fläche wird durch eine Gerade h_k in zwei Flächenstücke gleichen Inhalts geteilt, wobei die Gerade h_k für $x < 0$ den Graphen G_k nur auf der x -Achse schneidet. Ermitteln Sie eine Gleichung von h_k .
- f Betrachtet werden reelle Werte von u , die größer als -10 sind. Ausgehend von den Punkten $(-10 | 0)$ und $(u | 0)$ stellen die folgenden vier Schritte die Lösung einer Aufgabenstellung in einem geometrischen Zusammenhang dar: 6
- (1) $p_k(u) = \frac{1}{2} \cdot (u + 10) \cdot f_k(u)$
 - (2) $p'_k(u) = 0 \Leftrightarrow u = 10$
 - (3) Es gilt: $p''_k(10) < 0$
 - (4) Ergebnis: $p_k(10) \approx 73,6 \cdot k$
- Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an und erläutern Sie die Schritte.

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe eine mögliche Lösung dar. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1	a $f(0) - f(44) \approx 28,0$ Der Höhenunterschied beträgt etwa 280 cm.	3
	b Die Gerade durch $(0 30)$ und $(30 0)$ schließt mit der x-Achse einen Winkel der Größe 45° ein und verläuft steiler als die eingezeichnete Sekante. Das Sicherheitskriterium I ist erfüllt. 	3
	c Aus $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$ ergibt sich in Verbindung mit der Abbildung 10 als Wendestelle. $\tan \alpha = f'(10) \Rightarrow \alpha \approx -48^\circ$ Das Sicherheitskriterium II ist erfüllt.	4
	d Die Strecke ist Teil der Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + b$, wobei $m = \frac{-1}{f'(40)} = \frac{e^4}{12}$ und $b = f(40) - \frac{e^4}{12} \cdot 40 = 150 \cdot e^{-4} - 10 \cdot \frac{e^4}{3}$ gilt. $0 = \frac{e^4}{12} \cdot x + 150 \cdot e^{-4} - 10 \cdot \frac{e^4}{3}$ führt zu $x_1 \approx 39,4$. $\sqrt{(f(40))^2 + (40 - x_1)^2} \approx 2,8$ Die Strebe hat eine Länge von etwa 28 cm.	6
2	a Wegen $k \cdot e^{-0,1x} \neq 0$ ist -10 die einzige Lösung von $f_k(x) = 0$. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = -\infty$ für $k > 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_k(x) = +\infty$ für $k < 0$	3
	b $f'_k(x) = k \cdot (e^{-0,1x} - 0,1 \cdot (x+10) \cdot e^{-0,1x}) = -0,1 \cdot k \cdot x \cdot e^{-0,1x}$ $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ $f_k(0) = 10k$ Der Extrempunkt von G_k ist $(0 10k)$. Unter Berücksichtigung der Nullstelle -10 folgt, dass für positive Werte von k ein Hoch-, für negative Werte von k ein Tiefpunkt vorliegt.	5

c	$f_{k+1}(0) - f_k(0) = (k+1) \cdot 10 - k \cdot 10 = 10$	2
d	$-f_k(x) = -k \cdot (x+10) \cdot e^{-0,1x} = f_{-k}(x)$ Die Aussage ist wahr.	3
e	Flächeninhalt eines der beiden Flächenstücke: $\frac{1}{2} \cdot \int_{-10}^0 f_k(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (F_k(0) - F_k(-10)) = \frac{1}{2} \cdot ((-200 \cdot k) - (-100 \cdot k \cdot e)) = 50 \cdot k \cdot (e - 2)$ Gleichung von h_k: $y = m_k \cdot x + b_k$ $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot b_k = 50 \cdot k \cdot (e - 2) \Leftrightarrow b_k = 10 \cdot k \cdot (e - 2)$ $m_k = \frac{b_k}{10} = k \cdot (e - 2)$	5
f	Aufgabenstellung: Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k den größten Flächeninhalt eines Dreiecks, das die Eckpunkte $(-10 0)$, $(u 0)$ und $(u f_k(u))$ besitzt. Erläuterung: p_k gibt den Flächeninhalt eines solchen Dreiecks an: Länge der Grundseite $u+10$ und Höhe $f_k(u)$. In den Schritten (2) und (3) wird der Wert von u bestimmt, für den p_k als einziges Extremum ein Maximum annimmt. Dieses Maximum beträgt etwa $73,6 \cdot k$.	6
		40

3 Standardbezug

Teilaufgabe	BE	allgemeine mathematische Kompetenzen						Anforderungsbereich		
		K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	3			I		I		X		
b	3	II		II	II		II		X	
c	4	II	II	II		II	II		X	
d	6		II	II		II			X	
2 a	3	I				I		X		
b	5	I	II		II	II			X	
c	2		I			I		X		
d	3	II				I	II		X	
e	5	II	III			II	II			X
f	6	III	II				III			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist ein Bewertungsraster² vorgesehen, das angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Das Bewertungsraster ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.