

ABI 2024 – Stochastik WTR-2

1 Aufgabe

BE

1 Bei einer statistischen Erhebung werden in einer deutschen Großstadt die privaten Haushalte mit mindestens einem Kind im Vorschulalter betrachtet. Diese werden im Folgenden als „junge Haushalte“ bezeichnet. Es wird festgestellt, dass 60 % der jungen Haushalte mit mindestens einem Pkw ausgestattet sind und 8 % der jungen Haushalte mit mindestens einem Lastenrad. In 14 % der jungen Haushalte ohne Pkw ist mindestens ein Lastenrad vorhanden.

a Stellen Sie den beschriebenen Sachverhalt in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar.

4

b Beurteilen Sie für diese Großstadt die folgende Aussage:

3

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter junger Haushalt mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet ist, ist bei einem jungen Haushalt ohne Pkw mehr als dreimal so groß wie bei einem jungen Haushalt mit mindestens einem Pkw.

300 junge Haushalte dieser Großstadt werden zufällig ausgewählt.

c Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 20 und höchstens 30 dieser Haushalte mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet sind.

3

d Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $1 - \sum_{k=201}^{300} \binom{300}{k} \cdot 0,6^k \cdot 0,4^{300-k}$ berechnet werden kann.

2

e Eine Kita betreut 80 Kinder, von denen zwölf mit dem Lastenrad dorthin gebracht werden. Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zehn zufällig ausgewählten Kindern dieser Kita genau zwei befinden, die mit einem Lastenrad gebracht werden, etwa 29,6 % beträgt.

3

2 Betrachtet werden Vorderrad- und Hinterradreifen für Lastenräder. Auf einem Prüfstand kann die Laufleistung von solchen Reifen gemessen werden. Die Laufleistung gibt die auf dem Prüfstand ermittelte Gesamtstrecke an, bis der Reifen unbrauchbar wird. Die Zufallsgröße V beschreibt die Laufleistung in Kilometern (km) der Vorderradreifen eines bestimmten Herstellers, die Zufallsgröße H der Hinterradreifen desselben Herstellers. V wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert 6800 km und der Standardabweichung 530 km angenommen. H wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert 4600 km und der Standardabweichung 480 km angenommen.

a Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählter Vorderradreifen dieses Herstellers eine Laufleistung hat, die um höchstens 600 km vom Erwartungswert für diese Laufleistung abweicht.

2

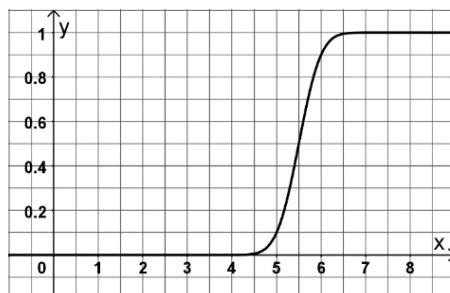
b Begründen Sie, dass die folgende Aussage für die Vorderrad- und Hinterradreifen dieses Herstellers wahr ist:

4

Die Laufleistung, die ein zufällig ausgewählter Vorderradreifen gemäß dem Modell mit der Wahrscheinlichkeit von 90 % übertreffen wird, wird ein zufällig ausgewählter Hinterradreifen nahezu mit Sicherheit unterschreiten.

c Die Zufallsgröße Z beschreibt die Laufleistung in km der Hinterradreifen eines anderen Herstellers. Z wird als normalverteilt mit dem Erwartungswert μ_Z und der Standardabweichung σ_Z angenommen. Die Abbildung stellt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = P(Z \leq 1000 \cdot x)$ dar.

Ermitteln Sie die Werte von μ_Z und σ_Z jeweils in km.



4

Lösungen 2024_M_erhoeht_B_Stochastik_WTR_2

Nr 1

Das muss aufgeschrieben werden	Das sind nur Kommentare dazu																																
a) A: „Ein junger Haushalt ist mit mindestens einem Pkw ausgestattet.“ B: „Ein junger Haushalt ist mit mindestens einem Lastenrad ausgestattet.“ <table><tr><td></td><td>B</td><td>$\bar{B}$</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td>0,024</td><td>0,576</td><td>0,6</td></tr><tr><td>$\bar{A}$</td><td>0,056</td><td>0,344</td><td>0,4</td></tr><tr><td></td><td>0,08</td><td>0,92</td><td>1</td></tr></table>		B	$\bar{B}$		A	0,024	0,576	0,6	$\bar{A}$	0,056	0,344	0,4		0,08	0,92	1	Die lila hinterlegten Werte sind direkt aus dem Text entnommen. Der rot hinterlegte Werte ist auf Grund von „In 14 % der jungen Haushalte ohne Pkw ist mindestens ein Lastenrad vorhanden“ zu berechnen über $0,4 \cdot 0,14 = 0,056$. <table><tr><td></td><td>B</td><td>$\bar{B}$</td><td></td></tr><tr><td>A</td><td>0,024</td><td>0,576</td><td>0,6</td></tr><tr><td>$\bar{A}$</td><td>0,056</td><td>0,344</td><td>0,4</td></tr><tr><td></td><td>0,08</td><td>0,92</td><td>1</td></tr></table>		B	$\bar{B}$		A	0,024	0,576	0,6	$\bar{A}$	0,056	0,344	0,4		0,08	0,92	1
	B	$\bar{B}$																															
A	0,024	0,576	0,6																														
$\bar{A}$	0,056	0,344	0,4																														
	0,08	0,92	1																														
	B	$\bar{B}$																															
A	0,024	0,576	0,6																														
$\bar{A}$	0,056	0,344	0,4																														
	0,08	0,92	1																														
b) $3 \cdot \frac{0,024}{0,6} = 0,12 < 0,14$ Damit ist die Aussage wahr.																																	
c) $P(21 \leq X \leq 30)$ $= P(X \leq 30) - P(X \leq 20)$ $\approx 0,9131 - 0,2322 = 68,09\%$	Hier könnte man auch $F_{300;0,08}(X \leq 30) - F_{300;0,08}(X \leq 20)$ schreiben																																
d) Höchstens 200 dieser Haushalte sind mit mindestens einem Pkw ausgestattet.																																	
e) $\frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{68}{8}}{\binom{80}{10}} \approx 29,6\%$	Hier wird einfach über LaPlace $P = \frac{\text{günstige}}{\text{mögliche}}$ die Wahrscheinlichkeit berechnet. Zähler Die 80 Kinder teilen sich auf in 12, die mit dem Lastenrad gebracht werden und 68, die anderweitig zur Kita kommen. $\binom{12}{2}$: Anzahl an Möglichkeiten, 2 aus 12 auszuwählen $\binom{68}{8}$: Anzahl an Möglichkeiten, 8 aus 68 auszuwählen Nenner: $\binom{80}{10}$: Anzahl der Möglichkeiten aus 80 Kindern 10 auszuwählen																																

Nr 2

<i>Das muss aufgeschrieben werden</i>	<i>Das sind nur Kommentare dazu</i>
a) $P(6200 \leq V \leq 7400) \approx 74,24\%$	Normalverteilung mit $\mu = 6800$ und $\sigma = 530$
b) $P(V > c) = 0,9$ $1 - P(V \leq c) = 0,9$ $P(V \leq c) = 0,1$ $c \approx 6120,8$ Ein zufällig ausgewählter Hinterradreifen hat wegen $P(H \geq 6120,8) \approx 0,0008$ mit nur sehr geringer Wahrscheinlichkeit eine Laufleistung von mindestens 6120,8 km.	Das „c“ findet man nur durch Ausprobieren heraus.
c) Wegen $P(Z \leq 5500) \approx 0,5$ ist $\mu_Z \approx 5500$. Der Abbildung ist $P(Z \leq 5000) \approx 0,1$ zu entnehmen. Damit erhält man durch systematisches Probieren $\sigma_Z \approx 390$.	Der Erwartungswert μ_Z und die Standardabweichung σ sind Eigenschaften der Normalverteilung (Glockenkurve), der Graph zeigt allerdings die kumulierte Normalverteilung (NormalCDF) also den Graph von $P(Z \leq k) = \int_0^k \Phi_{\mu_Z, \sigma} dx$ an. Das gezeichnete P ist also die Stammfunktion von Φ. Der Wendepunkt der Stammfunktion ist immer ein Extrempunkt der Ableitung. Die Stammfunktion ist hier P und Φ ist ihre Ableitung. Der Wendepunkt des gezeichneten P ist also der gesuchte Hochpunkt von Φ (das gesuchte μ_Z). Um die Standardabweichung zu bestimmen braucht man den Abstand des Hochs- zum Wendepunkt. Der Wendepunkt der Ableitung kann man aus dem Graph der Stammfunktion aber nicht bestimmen, deswegen bleibt nur: Ausprobieren...